

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni integrali di prima specie*. Nota del dott. LUCIO SILLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (1).

Lo studio delle *deformazioni fondamentali* di un mezzo elastico isotropo mi ha condotto a risolvere un certo sistema di equazioni integrali di prima specie (2) ed a cercare di ridurre nella forma più conveniente la soluzione del sistema stesso.

Ora i teoremi trovati dallo Schmidt (3), dal Picard (4) e dal Lauricella (5) sull'equazione integrale di prima specie, non che un recente teorema del Weyl, che è stato già da me applicato in una quistione di fisica-matematica (6), permettono di esprimere in modo assai semplice la soluzione di un sistema di equazioni integrali di prima specie, lineari ed a limiti costanti.

Sembrandomi che il risultato della mia ricerca possa offrire un sufficiente interesse, indipendentemente dalla questione meccanica che l'ha provocata, mi sono deciso ad esporlo nella presente Nota, convinto che esso potrà trovare utili applicazioni anche in altri campi della fisica-matematica.

* * *

1. Sia l'equazione integrale di prima specie

$$(1) \quad g(s) = \int_0^1 K(s, t) h(t) dt,$$

dove con $g(s)$ e $K(s, t)$ indichiamo due funzioni *date*, e con $h(t)$ una funzione *incognita*.

Relativamente a queste funzioni supporremo soddisfatte le condizioni seguenti: $g(s)$ sia continua; $K(s, t)$ sia *sommabile* insieme con il suo quadrato nel campo ($0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$); infine si cerca una soluzione $h(t)$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 giugno 1913.

(2) Cfr. Silla, *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, ser. 5^a, 1913, pp. 12-18 e 216-222).

(3) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (Mathematische Annalen, Bd. 63, 1907, pp. 433-476).

(4) E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce...* (Rendic. del Circolo matem. di Palermo, tom. XXIX, 1910, pp. 79-97).

(5) G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1^a specie* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5^a, 1909, pp. 71-75); e *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1^a specie* (Ibid., vol. XX, ser. 5^a, 1911, pp. 528-536).

(6) Nella Nota *Sulla propagazione del calore* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, [vol. XXI, ser. 5^a, 1912, pp. 441-447).

della (1) che sia sommabile insieme con il suo quadrato nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$.

Indichiamo, a norma della teoria dello Schmidt, con

$$\varphi_1(s), \psi_1(s); \varphi_2(s), \psi_2(s); \dots$$

la serie finita o infinita delle coppie di *autofunzioni del nucleo* $K(s, t)$, e con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

la serie dei corrispondenti *autovalori* (costanti) i quali, nel caso che siano in numero infinito, ammettono l'unico punto limite $\lambda \equiv \infty$. Come è noto, sussistono le equazioni *coniugate*:

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_i(s) = \lambda_i \int_0^1 K(s, t) \psi_i(t) dt, \\ \psi_i(s) = \lambda_i \int_0^1 K(t, s) \varphi_i(t) dt. \end{cases}$$

Se il nucleo $K(s, t)$ è simmetrico negli argomenti s e t , vi è l'unica serie $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ di autofunzioni e le (2) si riducono all'equazione

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int_0^1 K(s, t) \varphi_i(t) dt.$$

2. Se $p(t)$ è una funzione integrabile nell'intervallo $(0, 1)$ e tale che

$$(3) \quad \int_0^1 K(s, t) p(t) dt = 0,$$

sussisteranno le equazioni

$$(4) \quad \int_0^1 p(t) \psi_i(t) dt = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

e inversamente.

Se l'equazione (3) è soddisfatta soltanto da $p(t)$ identicamente zero, diremo, con la terminologia dell'Hilbert, che il nucleo $K(s, t)$ è *chiuso*. In tal caso anche le (4) saranno soddisfatte da $p(t)$ identicamente zero: vale a dire *la successione della ψ_i è chiusa*, e viceversa.

3. Rappresentiamo con a_i i *coefficienti di Fourier* relativi alla funzione $g(s)$ ed alla successione $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$; si abbia cioè:

$$a_i = \int_0^1 g(s) \varphi_i(s) ds. \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

a) Se il nucleo è chiuso, il Picard ha dimostrato per primo che condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (1) abbia una soluzione

$h(t)$, sommabile con il suo quadrato nell'intervallo $(0, 1)$, è che la serie

$$\sum_1^{\infty} \lambda_i^2 a_i^2$$

sia convergente. Segue, in tal caso, necessariamente, che la serie $\sum_1^{\infty} a_i \varphi_i(s)$ converge uniformemente e in modo assoluto; e si ha

$$(5) \quad g(s) = \sum_1^{\infty} a_i \varphi_i(s).$$

Sempre nell'ipotesi del nucleo chiuso e dell'esistenza di una soluzione $h(t)$ dell'equazione (1) proposta, risulta che la soluzione $h(t)$ deve essere unica; giacchè se vi fosse un'altra soluzione $h_1(t)$, diversa da $h(t)$, si avrebbe:

$$\int_0^1 K(s, t) \{ h(t) - h_1(t) \} dt = 0,$$

e allora l'equazione (3) ammetterebbe una soluzione diversa da zero, ossia il nucleo $K(s, t)$ sarebbe non chiuso, contrariamente all'ipotesi ammessa.

b) Se il nucleo non è chiuso, un teorema del Lauricella ⁽¹⁾ stabilisce due condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione dell'equazione (1): 1^a) che la serie $\sum_1^{\infty} \lambda_i^2 a_i^2$ sia convergente; 2^a) che la data funzione $g(s)$ sia esprimibile mediante la serie $\sum_1^{\infty} a_i \varphi_i(s)$. Trovata una soluzione $h_1(t)$ della equazione proposta, il Lauricella ha altresì dimostrato che se $\chi(t)$ è la funzione più generale del campo $(0, 1)$ per cui la serie $\sum_1^{\infty} \psi_i(t) \int_0^1 \chi(s) \psi_i(s) ds$ sia integrabile termine a termine, la soluzione più generale dell'equazione (1) è data dalla formola:

$$h(t) = h_1(t) + \varrho(t),$$

dove:

$$(6) \quad \varrho(t) = \chi(t) - \sum_1^{\infty} \psi_i(t) \int_0^1 \chi(s) \psi_i(s) ds.$$

* * *

4. Ciò premesso, e considerando per ora il caso del nucleo chiuso, supponiamo che esista la soluzione $h(t)$ dell'equazione (1) e sia integrabile col suo quadrato nell'intervallo $(0, 1)$. Sarà dunque (n. 3) convergente la serie $\sum_1^{\infty} \lambda_i^2 a_i^2 = \sum_1^{\infty} A_i^2$, avendo posto $A_i = \lambda_i a_i$: e perciò, scelto ε positivo e

(1) Nella Nota citata innanzi: *Sull'equazione integrale di 1^a specie*.

piccolo a piacere, esisterà un numero intero n_1 tale che, per $n > n_1$, sarà soddisfatta la condizione:

$$\sum_{i=1}^{n+q} A_i^2 < \varepsilon.$$

Costruiamo allora la successione seguente:

$$(7) \quad f_j(s) = \sum_{i=1}^j A_i \psi_i(s) \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

e formiamo l'integrale

$$\int_0^1 (f_m - f_n)^2 ds :$$

se $n > n_1$, posto $m = n + q$ e tenuto conto che le ψ_i costituiscono un sistema *ortogonale e normale*, si avrà:

$$\int_0^1 (f_m - f_n)^2 ds = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=n+1}^{n+q} A_i \psi_i \right\}^2 ds = \sum_{i=n+1}^{n+q} A_i^2 < \varepsilon.$$

Tanto basta per concludere che la successione (7) è *convergente in media*, secondo il Fischer, in tutto l'intervallo $(0, 1)$ e quindi, per il teorema del Weyl, sarà sempre possibile di trovare una successione di numeri interi, positivi e crescenti, n_1, n_2, n_3, \dots , tali che la serie:

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \dots$$

converge *uniformemente in generale* (fatta, cioè, eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla) in tutto l'intervallo $(0, 1)$ verso una funzione $f(s)$ sommabile col suo quadrato nell'intervallo stesso.

Si ha dunque:

$$(8) \quad f(s) = \sum_{i=1}^{n_1} A_i \psi_i(s) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} A_i \psi_i(s) + \dots = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i a_i \psi_i(s) + \\ + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i a_i \psi_i(s) + \dots$$

Ora è facile dimostrare che la funzione $f(s)$ soddisfa all'equazione (1). Mutiamo, infatti, nella (8), s in t : moltiplichiamo poi ambo i membri per $K(s, t) dt$ e integriamo fra 0 e 1; si ha:

$$\int_0^1 K(s, t) f(t) dt = \int_0^1 K(s, t) dt \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i a_i \psi_i(t) + \dots = \\ = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \lambda_i \int_0^1 K(s, t) \psi_i(t) dt + \dots;$$

ovvero, per le (2) e (5).

$$\int_0^1 K(s, t) f(t) dt = \sum_1^{n_1} a_i \varphi_i(s) + \dots = g(s).$$

Dunque la funzione $f(s)$, definita dalla serie (8), è la soluzione dell'equazione integrale (1).

Se il nucleo non è chiuso, la soluzione più generale di (1) si ottiene aggiungendo ad $f(s)$ la funzione $g(s)$ definita da (6), come ha mostrato il Lauricella (1). Il ragionamento che precede si applica direttamente al caso del nucleo chiuso.

* * *

5. Sia ora proposto il seguente sistema di equazioni integrali di prima specie:

$$(9) \quad g_i(s) = \int_0^1 \sum_r^n K_{ir}(s, t) h_r(t) dt$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Se poniamo, col Fredholm (2),

$$(10) \quad K(s, t) = K_{ir}(s - i + 1, t - r + 1), \quad (i - 1 \leq s \leq i; r - 1 \leq t \leq r)$$

$$(11) \quad h(t) = h_r(t - r + 1), \quad (r - 1 \leq t \leq r)$$

$$g(s) = g_i(s - i + 1), \quad (i - 1 \leq s \leq i),$$

sarà possibile di comprendere il sistema (9) nell'unica equazione integrale di prima specie:

$$(12) \quad g(s) = \int_0^n K(s, t) h(t) dt.$$

Infatti, ad ogni sistema di soluzioni $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ del sistema (9) proposto, corrisponderà una soluzione $h(t)$ dell'equazione (12). Viceversa, ad ogni soluzione $h(t)$ dell'equazione integrale (12), corrisponderà il sistema di soluzioni $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ dell'equazione (9), a norma della (11), che può anche scriversi

$$h_r(t) = h(t + r - 1). \quad (0 \leq t \leq 1).$$

(1) Nella Nota citata: *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie.*

(2) I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathem., tom. 27, 1903, pp. 365-390).

6. Consideriamo ora il seguente sistema:

$$(13) \quad \int_0^1 \sum_{r=1}^n K_{ir}(s, t) p_r(t) dt = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Se poniamo, insieme con le (10), le condizioni

$$(14) \quad p(t) = p_r(t - r + 1), \quad (r - 1 \leq t \leq r)$$

si può provare che il sistema (13) equivale all'unica equazione

$$(15) \quad \int_0^n K(s, t) p(t) dt = 0,$$

giacchè ad ogni sistema di soluzioni $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ di (13), corrisponderà una soluzione $p(t)$, data dalla (14), dell'equazione (15); e, viceversa, ad ogni soluzione $p(t)$ della (15) corrisponderà un sistema di soluzioni $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ delle equazioni (13), che si ottengono da $p(t)$ per mezzo della (14) o della seguente:

$$p_r(t) = p(t + r - 1). \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Si conclude (n. 2) che se l'equazione (15) non ammette soluzione alcuna diversa da zero, ossia se il nucleo $K(s, t)$ è chiuso, neppure il sistema delle equazioni (13) ammetterà soluzioni diverse da zero: vale a dire che il sistema dei nuclei $K_{ir}(s, t)$ sarà chiuso; e viceversa.

Le equazioni (13), pertanto, allorchè ammettono l'unica soluzione $p_1(t) = p_2(t) = \dots = p_n(t) = 0$, costituiscono la condizione di chiusura dei sistemi di nuclei $K_{ir}(s, t)$, così come l'equazione (4), allorchè è soddisfatta soltanto da $p(t) = 0$, costituisce la condizione di chiusura del nucleo $K(s, t)$, ossia dell'unicità della soluzione dell'equazione (1), nell'ipotesi che la soluzione esista.

7. Nel caso dell'equazione (12) le coppie $\varphi_i(s), \psi_i(s)$ di autofunzioni del nucleo $K(s, t)$ soddisfano (n. 1) alle equazioni seguenti:

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int_0^n K(s, t) \psi_i(t) dt,$$

$$\psi_i(s) = \lambda_i \int_0^n K(t, s) \varphi_i(t) dt;$$

quindi, se poniamo:

$$\varphi_{i\mu}(s) = \varphi_i(s + \mu - 1), \quad \psi_{i\mu}(s) = \psi_i(s + \mu + 1); \quad (0 \leq s \leq 1)$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\varphi_i(s) = \varphi_{i\mu}(s - \mu + 1) \quad , \quad \psi_i(s) = \psi_{i\mu}(s - \mu + 1) \quad (\mu - 1 \leq s \leq \mu)$$

con $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$, si riconosce che ad ogni coppia di autofunzioni $\varphi_i(s)$ e $\psi_i(s)$ corrisponderanno due serie di n funzioni ciascuna, cioè $\varphi_{i1}(s)$, $\varphi_{i2}(s), \dots, \varphi_{in}(s)$ e $\psi_{i1}(s), \psi_{i2}(s), \dots, \psi_{in}(s)$ che soddisfano ai sistemi coniugati:

$$\begin{aligned} \varphi_{i\mu}(s) &= \lambda_i \int_0^1 \sum_r^n K_{\mu r}(s, t) \psi_{ir}(t) dt, \\ \psi_{i\mu}(s) &= \lambda_i \int_0^1 \sum_r^n K_{\mu r}(t, s) \varphi_{ir}(t) dt, \\ (\mu &= 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

8. Se il nucleo $K(s, t)$ dell'equazione (12) è chiuso, e se esiste una soluzione $h(t)$ dell'equazione stessa, si è veduto (n. 4) che, posto

$$a_i = \int_0^n g(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \int_0^1 \sum_r^n g_r(\xi) \varphi_{ir}(\xi) d\xi,$$

si avrà

$$(16) \quad h(t) = \sum_1^{n_1} \lambda_i a_i \psi_i(t) + \sum_{n_1+1}^{n_2} \lambda_i a_i \psi_i(t) + \dots$$

e la serie a secondo membro converge uniformemente, in generale, nell'intervallo $(0, n)$.

Ma allora, per la corrispondente soluzione $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ del sistema di equazioni integrali di prima specie (9), si avrà:

$$(17) \quad h_r(t) = \sum_1^{n_1} \lambda_i a_i \psi_{ir}(t) + \sum_{n_1+1}^{n_2} \lambda_i a_i \psi_{ir}(t) + \dots$$

e le serie dei secondi membri saranno uniformemente convergenti, in generale, nell'intervallo $(0, 1)$.

È utile rammentare che, per la ortogonalità e normalità delle $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots$, si ha:

$$\int_0^1 \sum_r^n \psi_{ir}(\xi) \psi_{jr}(\xi) d\xi = \int_0^n \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \dots \text{ per } i \neq j \\ 1 & \dots \text{ " } i = j \end{cases}$$

9. Se il nucleo dell'equazione (12) non è chiuso, supposto soddisfatte (n. 3) le condizioni per l'esistenza di una soluzione $h_1(t)$ dell'equazione

stessa, sappiamo (n. 3) che la soluzione più generale si ottiene aggiungendo ad $h_i(t)$, che si può porre sempre sotto la forma (16), la funzione seguente:

$$(18) \quad q(t) = \chi(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) \int_0^n \chi(\xi) \psi_i(\xi) d\xi,$$

dove $\chi(t)$ è una funzione arbitraria nell'intervallo $(0, n)$.

Se poniamo

$$\chi_r(t) = \chi(t + r - 1) \quad , \quad q_r(t) = q(t + r - 1) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ (r = 1, 2, 3, \dots, n),$$

si avrà, altresì, dalla (18):

$$(19) \quad q_r(t) = \chi_r(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{ir}(t) \int_0^1 \sum_k^n \chi_k(\xi) \psi_{ik}(\xi) d\xi.$$

Quindi la soluzione del sistema di equazioni integrali di prima specie (9) sarà data da

$$h_r(t) + q_r(t), \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

dove $h_r(t)$ e $q_r(t)$ risultano espressi rispettivamente dalle (17) e (19). La soluzione, pertanto, comporta n funzioni arbitrarie.

Chimica. — *Sistemi binari del cloruro talloso coi cloruri di alcuni metalli bivalenti* ⁽¹⁾. Nota di C. SANDONNINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN ⁽²⁾.

In una Nota precedente ⁽³⁾ vennero studiati i sistemi del cloruro di litio coi cloruri degli elementi alcalino-terrosi: si giunse così a stabilire che il cloruro di litio dà ad alta temperatura soluzioni solide coi cloruri di magnesio e di calcio e semplici eutettici coi cloruri di stronzio e di bario, in accordo colla nota analogia del litio massima per il magnesio e man mano diminuente per gli altri alcalino-terrosi.

Il tallio monovalente riunisce in sè il carattere di un metallo alcalino con quello di un metallo pesante del tipo del piombo: così, per esempio, l'energia del suo idrato è paragonabile a quella degli idrati alcalini, la so-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1913.

⁽³⁾ Questi Rendiconti, 22, 1^a sem., pag. 629 (1913).