ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del **1913**.
(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo* $f(x+y)=\sum_1^n {}_i \mathrm{X}_i(x)\,\mathrm{Y}_i(y)$. Nota del Socio TULLIO LEVI-CIVITA [1].

1. L'esponenziale $e^{\omega x}$ (ω costante arbitraria), le funzioni trigonometriche $\cos\omega x$, $\sin\omega x$, i polinomî $\mathrm{P}(x)$ offrono altrettanti esempî di funzioni $f(x)$, che verificano un teorema di addizione della forma

$$f(x+y)=\sum_1^n {}_i \mathrm{X}_i(x)\,\mathrm{Y}_i(y)\,. \tag{1}$$

Basta manifestamente assumere

$$n=1\ ,\quad \mathrm{X}_1=e^{\omega x}\ ,\quad \mathrm{Y}_1=e^{\omega y}$$

per l'esponenziale;

$$n=2\ ,\ \mathrm{X}_1=\cos\omega x\ ,\ \mathrm{Y}_1=\cos\omega y\ ,\ \mathrm{X}_2=\sin\omega x\ ,\ \mathrm{Y}_2=-\sin\omega y$$

per $\cos\omega x$;
$n=$ grado di $\mathrm{P}(x)$ aumentato di una unità . . . ; ecc.

In generale, però, una funzione $f(x)$ (uniforme e regolare in un certo campo, al quale intendiamo riferirci) non soddisfa ad alcuna equazione funzionale (1), in cui n rappresenti un intero finito. Si può soltanto (e in infiniti modi, per es. mercè la serie di Taylor) farla rientrare nel caso limite $n=\infty$. Ritenuta la circostanza essenziale che il secondo membro della (1)

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1913.

consti di un numero finito di termini, vien fatto naturalmente di domandarsi: Quali sono *tutte* le funzioni uniformi $f(x)$ per cui vale un teorema di addizione (1)? La risposta è che le somme di un numero finito di termini del tipo $P(x)\,e^{\omega x}$ (le P designando polinomî, e le ω costanti reali o complesse) esauriscono tutti i casi possibili: conclusione puramente negativa, in quanto non collega alla (1) alcuna nuova trascendente, annoverabile tuttavia fra le proprietà caratteristiche. Mi permetto pertanto di farne oggetto di brevissima comunicazione.

2. Cominciamo coll'osservare che le funzioni $X_i(x)$ (e analogamente le Y_i) si possono supporre linearmente indipendenti. Infatti, qualora alcune tra esse fossero combinazioni lineari delle rimanenti, si potrebbero sostituire con queste combinazioni. Il secondo membro della (1) manterrebbe allora la stessa forma, salvo un più piccolo valore di n.

Riterremo, in conformità, che siano diversi da zero i due wronskiani:

$$A = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1' & X_2' & \dots & X_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{(n-1)} & X_2^{(n-1)} & \dots & X_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

delle X, e B delle Y.

3. *Conseguenze della* (1). *Condizione necessaria per la funzione f.* — Deriviamo la (1) una prima volta rispetto ad x, una seconda rispetto ad y. Dall'eguaglianza dei primi membri segue

$$\sum_1^n{}_i\, X_i'\, Y_i = \sum_1^n{}_i\, X_i\, Y_i'. \tag{2}$$

Derivando successivamente, rispetto ad y, $n-1$ volte, e formando sistema colla (2), si hanno n equazioni lineari nelle $\mathbf{X}'$, risolubili rispetto alle X' stesse, in forza di $B \neq 0$. Le espressioni risolute sono del tipo

$$X_i' = \sum_1^n{}_j\, \eta_{ij}\, X_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le η designando funzioni della y.

Dacchè la (1) e, con essa, le derivate e loro combinazioni, devono sussistere per valori qualisivogliano di x, y (appartenenti ad un certo campo), potremo in particolare attribuire ad y, nelle espressioni testè ricavate per le X_i', un valore fisso y_0 (del campo). I coefficienti $\eta_{ij}(y_0)$ divengono, così, altrettante costanti a_{ij}, sicchè intanto *le X_i sono necessariamente soluzioni di un sistema*

$$X_i' = \sum_1^n{}_j\, a_{ij}\, X_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

lineare, a coefficienti costanti.

Notiamo, per incidenza, che analoga proprietà spetta alle Y_i. Ove si designino con b_{ij} i coefficienti del corrispondente sistema, si trae dalla (2) [attesa l'indipendenza così delle $X_i(x)$, come delle $Y_i(y)$] $b_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. *Le* Y_i *sono quindi soluzioni del sistema aggiunto a* (3).

Ma il risultato relativo alle X_i basta da solo allo scopo essenziale di caratterizzare le funzioni f cui compete un teorema di addizione della forma (1). La (1) stessa implica infatti (ponendovi, come sopra, $y = y_0$) che f sia combinazione lineare a coefficienti costanti di $X_1, X_2, \dots, X_n$. Lo stesso può dirsi, in virtù delle (3), delle derivate successive di f rapporto ad $x: f', f'', \dots, f^{(n)}$. L'eliminazione delle X dà luogo ad una *equazione in f, lineare, omogenea, a coefficienti costanti* (d'ordine, al più, eguale ad n). Questa è dunque *condizione necessaria*.

4. Ma è anche *sufficiente*. Infatti, ogni integrale $f(x)$ d'una tale equazione è somma di un numero finito di termini del tipo $P(x)\, e^{\omega x}$ (P polinomio in x, ω costante).

$f(x + y)$ è quindi esprimibile sotto la forma (1),

c. d. d.

Chimica fisica. — *Viscosità e tensione superficiale di sospensioni e soluzioni di proteine muscolari, sotto l'influenza di acidi e di alcali* [1]. Nota del Corrisp. Filippo Bottazzi e del dott. E. D'Agostino [2].

Le sospensioni, su cui abbiamo sperimentato, sono del materiale granulare (miosina), che si ottiene dal succo muscolare nel modo descritto da Bottazzi e Quagliariello [3]. Questo materiale, agitato fortemente in acqua in presenza di palline di porcellana entro un apparecchio d'agitazione automatica, forma poi una sospensione sufficientemente stabile, specialmente se la si libera dei granuli più grossi per sedimentazione o per filtrazione attraverso lana di vetro o amianto in fili sottili.

Servendoci di viscosimetri e stalagmometri a capillare convenientemente ampio, abbiamo potuto fare molte determinazioni di *tempo di deflusso* e di *numero di gocce* delle dette sospensioni, sia pure che dopo avere aggiunto quantità note di acidi (cloridrico e lattico) e di alcali (KOH). La ragione per cui abbiamo scelto il detto materiale, è questa. Esso resulta di un colloide insolubile in acqua, ma che in presenza di acidi e di alcali, prima s'imbeve, oltre il grado d'imbibizione che già presenta, e poi mano mano si scioglie, tanto più quanto più concentrata è la soluzione acida

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia di Napoli.

[2] Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1913.

[3] Questi Rendiconti (serie 5ª), vol. 22, pag. 52 (1913).