ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

perficiale (Esp. V); l'aggiunta dello stesso sale alla soluzione di metemoglobina pura (non dializzata fino a determinarne la precipitazione), non esercita un'azione analoga degna di nota.

6. Da precedenti esperienze [1] resulta che, contrariamente alla viscosità, il cui aumento dipende dalla concentrazione attuale degli ioni proteici, l'abbassamento della tensione superficiale dipende principalmente dalle molecole di proteina non dissociate.

L'abbassamento della tensione superficiale da me osservato nelle sospensioni di metemoglobina in seguito all'azione dell' HCl o della Na OH, dipende essenzialmente dal passare della sostanza, sospesa, allo stato di soluzione. Eventuali variazioni della tensione superficiale di soluzioni di metemoglobina dipendenti, come quelle precedenti constatate da me in collaborazione col dott. E. d'Agostino in soluzioni di albumina, da variazioni dello stato di dissociazione della sostanza già sciolta, potranno essere messe in evidenza solo mediante ricerche più delicate, che non siano le presenti. Tuttavia, l'effetto che produce il cloruro sodico aggiunto a una soluzione di metemoglobinato sodico, che già ha raggiunto il minimo di tensione superficiale (effetto che consiste, come ho detto, in un' ulteriore abbassamento della tensione), mi pare che non possa spiegarsi se non ammettendo che esso sia la espressione di una parziale retrocessione della dissociazione del metemoglobinato, operata dai sodioni aggiunti, cioè della formazione di molecole indissociate di metemoglobinato sodico a spese dei rispettivi ioni.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti.* Nota di Annibale Comessatti, presentata dal Corrisp. F. Severi [2].

È noto che una superficie algebrica irregolare la quale possieda due integrali semplici di seconda (o, in particolare, di prima) specie algebricamente indipendenti, che siano funzioni uno dell'altro, contiene un fascio irrazionale di curve; e ancora si sa che tale proprietà si verifica tutte le volte che fra il genere geometrico p_g ed il genere aritmetico p_a della superficie intercede la disuguaglianza

$$p_g \geq 2(p_a + 2).$$

[1] Fil. Bottazzi e E. d'Agostino, Rend. R. Accad. dei Lincei (serie 5ª), vol. 21, pag. 561, an. 1912.

[2] Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1913.

Il ponte di passaggio fra questi due interessanti teoremi — dovuti rispettivamente a de Franchis [1] e Castelnuovo [2] — è fornito dalla relazione di Picard in virtù della quale, dati due integrali semplici di 1ª specie funzionalmente indipendenti, si può formare un ben determinato integrale doppio di 1ª specie che deriva razionalmente da quelli.

L'estensione del teorema di de Franchis, alle varietà algebriche era prevedibile; ma non si poteva altrettanto affermare della disuguaglianza di Castelnuovo finchè rimanevano sconosciute quelle relazioni — messe recentemente in luce da Severi [3] — che estendono alle varietà il risultato di Picard dando il modo di costruire razionalmente un integrale s-plo di 1ª specie appena sian noti s integrali semplici di 1ª specie funzionalmente indipendenti.

Profittando dei risultati di Severi, mi son proposto di attuare le suddette previsioni, e son giunto abbastanza agevolmente alle conclusioni desiderate.

In questa Nota estendo alle varietà il teorema de Franchis, poggiandone la dimostrazione sopra una osservazione assai semplice, di carattere analitico; in due Note successive stabilirò due disuguaglianze che possono considerarsi come estensioni di quella del Castelnuovo alle varietà a tre dimensioni, applicandole a caratterizzare le varietà di genere geometrico *uno* e quelle d'irregolarità tridimensionale negativa, e in fine accennando all'estensione relativa al caso delle varietà superiori.

1. *Osservazione preliminare.*

Date l funzioni analitiche indipendenti $u_1, u_2, \dots, u_l$ delle variabili complesse $x_1, x_2, \dots, x_k$ $(l \leq k)$, siano $u_{l+1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ altre $l+1$ funzioni, pure analitiche, delle stesse variabili, tali che valga l'identità

$$(1) \qquad du_{l+1} \equiv \lambda_1 du_1 + \lambda_2 du_2 + \cdots + \lambda_l du_l;$$

[1] de Franchis, *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XX (1905), pp. 49-54.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XX (1905), pp. 55-60. Il risultato di Castelnuovo è stato ulteriormente precisato da Rosenblatt in varî lavori: cfr. p. es. *Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité* $p_g \geq 2(p_a+2)$, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXV (1913), pp. 237-244.

[3] Severi, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica*, Annali di Matematica pura ed applicata (3), tom XX, pp. 201-216. A proposito d'una citazione bibliografica contenuta in questo suo lavoro, il prof. Severi mi prega di avvertire che la relazione ch'egli attribuisce a Nöther, Mathematische Annalen, Bd. 29 (1886), pag. 366, fu data prima da Picard, Journal de Mathématiques (4), tom. I (1885), pag. 285.

ci proponiamo di provare che si ha

$$(2) \qquad \lambda_i \equiv \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_l), \qquad (i = 1, 2, \dots, l),$$

cioè che le λ si possono considerare come funzioni di $u_1, u_2, \dots, u_l$.

Invero, siccome le $u_1, u_2, \dots, u_l$ sono funzioni indipendenti delle x, potremo, operando un cambiamento di variabili, considerare $u_{l+1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ come funzioni di $u_1, u_2, \dots, u_l$ e di $k - l$ fra le x, ad esempio $x_1, x_2, \dots, x_{k-l}$. Rispetto a queste nuove variabili varrà l'identità

$$du_{l+1} \equiv \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial u_{l+1}}{\partial u_i} du_i + \sum_{j=1}^{k-l} \frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_j} dx_j \equiv \sum_{i=1}^{l} \lambda_i du_i,$$

da cui seguiranno le

$$(3) \qquad \frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_j} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_{l+1}}{\partial u_i} \equiv \lambda_i, \qquad (j = 1, 2, \dots, k - l), (i = 1, 2, \dots, l),$$

la prima delle quali prova che u_{l+1} è indipendente da $x_1, x_2, \dots, x_{k-l}$, cioè si può considerare come funzione di $u_1, u_2, \dots, u_l$. Tale proprietà spetterà dunque anche alle derivate di u_{l+1} rapporto alle u, cioè — per la seconda delle (3) — alle λ, c. d. d.

Il risultato ottenuto vale evidentemente anche se le u e le λ son funzioni analitiche del punto variabile sopra una varietà algebrica a k dimensioni V_k, coll'osservazione che in tal caso le (2) (3) sono verificate soltanto sulla V_k stessa.

2. *Esistenza di un sistema d'indice 1 e d'irregolarità bidimensionale* > 0 *di varietà algebriche subordinate, sopra ogni varietà algebrica* V_k *d'irregolarità bidimensionale* $q > 0$, *con* $l + 1 \leq k$ *integrali semplici (trascendenti) funzionalmente dipendenti.*

Sia V_k una varietà algebrica irriducibile a k dimensioni, che possiamo supporre immersa in uno spazio $S_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_k, z)$, la quale possieda q integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti

$$(4) \qquad u_i \equiv \int P_{i1} dx_1 + P_{i2} dx_2 + \cdots + P_{ik} dx_k, \quad (i = 1, 2, \dots, q);$$

ci proponiamo di dimostrare che:

Se gli $l + 1 \leq k$ *integrali* $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$ *sono funzionalmente dipendenti senza che lo siano* l *tra essi, allora la* V_k *contiene un sistema* ∞^l, *d'indice* 1, *di varietà algebriche* M_{k-l} *di livello costante per* $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$, *che perciò ha l'irregolarità bidimensionale almeno uguale ad* $l + 1$.

Ammesso il teorema per le V_{k-i} $(i > 0)$, incominciamo coll'osservare che, a causa del legame funzionale supposto esistente fra $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$, sarà, su V_k, identicamente nulla la matrice

$$(5) \qquad \| P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik} \|, \qquad (i = 1, 2, \dots, l + 1),$$

e perciò le equazioni

$$(6) \qquad P_{1i}\mu_1 + P_{2i}\mu_2 + \cdots + P_{l-1i}\mu_{l+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

ammetteranno come soluzioni per $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l+1}$ certe espressioni formate coi minori della (15), cioè certe *funzioni razionali* di $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. E si noti che nessuna delle μ potrà essere identicamente nulla, perchè, se ad esempio lo fosse la μ_{l+1}, risulterebbe nulla la matrice formata colle prime l righe della (15) e quindi $u_1, u_2, \ldots, u_l$ sarebbero funzionalmente dipendenti. Posto $\lambda_i = -\dfrac{\mu_i}{\mu_{l+1}}$, $(i = 1, 2, \ldots, l)$, dalle (6), (4) seguirà la

$$du_{l+1} \equiv \lambda_1 du_1 + \lambda_2 du_2 + \cdots + \lambda_l du_l,$$

la quale prova che alle funzioni razionali (non identicamente nulle) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ si può applicare l'osservazione del n. 1, e che perciò, a norma della (2), esse sono del tipo

$$(17) \qquad \lambda_i \equiv \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_l), \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Anzitutto osserviamo che le funzioni φ_i *non possono ridursi tutte a delle costanti* [1]. Invero, allora, tenendo conto della seconda delle (3), la relazione funzionale, che intercede fra $u_1, u_2, \ldots, u_{l+1}$, si ridurrebbe a una relazione lineare a coefficienti *costanti*, e quindi $u_1, u_2, \ldots, u_{l+1}$ risulterebbero linearmente dipendenti.

Adunque qualcuna delle φ_i dipenderà effettivamente dalle u, e perciò una fra le relazioni (17) si potrà scrivere

$$(18) \qquad \lambda \equiv \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

λ essendo una funzione razionale di $x_1, x_2, \ldots, x_k, z$, e φ una funzione che *dipende effettivamente* dagli argomenti $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

L'equazione $\lambda = \text{cost}$ stacca su V_k una V_{k-1} algebrica variabile in un fascio che potrà eventualmente esser composto con un altro fascio (razionale o irrazionale) irriducibile Φ di V_{k-1}. Poichè la relazione (18) è verificata, per un conveniente valore di λ, sopra una V_{k-1} di Φ, su questa gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_r$ saranno funzionalmente dipendenti. E siccome sulla V_{k-1} generica di Φ, $r - 1$ fra quegl'integrali (ad esempio $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$) non possono essere funzionalmente legati, perchè ciò porterebbe ad una relazione del tipo

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}, \lambda) = 0,$$

ed eliminando λ fra essa e la (18) si otterrebbe una relazione fra $u_1, u_2, \ldots, u_r$ valida su tutta la V_k, così, tenuto conto che $r \leq l \leq k - 1$, si potrà

[1] Poichè $u_1, u_2, \ldots, u_l$ sono funzionalmente indipendenti, se una delle φ è costante rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_k$, lo è anche rispetto ad $u_1, u_2, \ldots, u_l$.

applicare alla V_{k-1} il teorema ammesso per le V_{k-i} e concludere che sulla generica V_{k-1} di Φ le varietà di livello costante per $u_1, u_2, \dots, u_r$ sono W_{k-r} algebriche formanti su ogni V_{k-1} un sistema ∞^{r-1} d'indice 1, e quindi entro V_k un sistema T, ∞^r, d'indice 1 (¹).

Sulla W_{k-r} generica di T gl'integrali $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{l+1}$ saranno funzionalmente dipendenti, perchè in virtù del legame esistente su V_k fra u_1, $u_2, \dots, u_{l+1}$, se si considera sulla W_{k-r} il luogo dei punti in cui u_{r+1}, $u_{r+2}, \dots, u_l$ sono costanti, ivi sarà costante anche u_{l+1} (perchè già lo sono $u_1, u_2, \dots, u_r$). Inoltre $l-r$ fra gli $l-r+1$ integrali considerati non potranno essere funzionalmente dipendenti sulla generica W_{k-r}, perchè altrimenti esisterebbe una relazione, valida su tutta la V_k, fra quegli $l-r$ integrali ed $u_1, u_2, \dots, u_r$. Siccome infine $l-r+1 \leq k-r$, così si potrà applicare alla W_{k-r} generica di T il teorema ammesso per le V_{k-i}, e concludere che su essa le varietà di livello costante per $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{l+1}$ saranno M_{k-l} algebriche, le quali entro V_k risulteranno di livello costante per $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$ e formeranno un sistema $\infty^l \Sigma$, d'indice 1. Inoltre gli integrali $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$ risulteranno in definitiva integrali di 1ª specie linearmente indipendenti appartenenti all'ente algebrico Σ, cosicchè questo avrà l'irregolarità bidimensionale almeno eguale ad $l+1$. Il teorema proposto è dunque completamente dimostrato.

Osservazione. — L'ipotesi che gl'integrali $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$ siano di 1ª specie, entra in gioco nella dimostrazione precedente solo quando si vuol provare che l'irregolarità bidimensionale del sistema Σ è $\geq l+1$. Sicchè l'esistenza del sistema Σ resta provata per il caso di integrali semplici qualunque; e inoltre, come ora dimostreremo, se quegl'integrali sono *trascendenti* (cioè se non si riducono a funzioni razionali o a combinazioni algebrico-logaritmiche), Σ ha l'irregolarità bidimensionale > 0.

Si tratta, in sostanza, di provare che una varietà algebrica V_l (imagine del sistema Σ) la quale possiede un integrale semplice *trascendente* di 2ª o di 3ª specie, ha necessariamente l'irregolarità bidimensionale positiva.

E invero, sopra una V_l d'irregolarità bidimensionale nulla tutti gli integrali semplici di 2ª specie si riducono a funzioni razionali, e quelli di 3ª specie a combinazioni algebrico-logaritmiche. La prima di queste due proprietà è immediata conseguenza del fatto che tutti i cicli lineari contenuti entro la Riemanniana imagine di V_l sono riducibili a punti per deformazione continua; e quanto alla seconda, essa si stabilisce facilmente imitando un ragionamento del Severi relativo al caso delle superficie regolari (²).

(¹) Se $r=1$, le W_{k-r} coincidono colle V_{k-1}.

(²) Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), pp. 104-225], § 5, n. 7, pp. 211-213. L'estensione a cui accenniamo è immediata, quando si osservi che, come sulle superficie

Il teorema dimostrato in questo numero è invertibile nel senso che se la varietà V_k possiede un sistema ∞^l d'indice 1 di M_{k-l} algebriche avente l'irregolarità bidimensionale $\geq l+1$, essa possiede $l+1$ integrali distinti di 1ª specie, funzionalmente dipendenti. Basta osservare che su una V_l imagine del sistema ∞^l, $l+1$ integrali di 1ª specie sono sempre funzionalmente dipendenti, e tener conto della sostituzione razionale che trasforma gli integrali di V_l in integrali di V_k.

Matematica. — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

1. Lo studio della Memoria del Dini: *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine* [2], nella quale trovansi stabiliti, sotto molteplici forme, numerosi teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche lineari del secondo ordine, mi incita alla pubblicazione della presente Nota in cui, ai sopradetti teoremi del Maestro, ne aggiungo dei nuovi di indole diversa. I teoremi qui enunciati non dipendono da speciali ipotesi fatte sui coefficienti dell'equazione, nè dalla presupposta conoscenza di integrali particolari dell'equazione data o dell'aggiunta.

Ai risultati di questa Nota pervengo basandomi sopra un *teorema di confronto* fra due equazioni ellittiche o paraboliche del secondo ordine che è un'estensione di quello da me stabilito, confrontando due equazioni ellittiche entrambe ed autoaggiunte, nella Nota: *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni* ecc. [3]; del quale teorema già feci applicazione per la determinazione di campi per cui vale il teorema di unicità nel problema di Dirichlet per la più generale equazione ellittica autoaggiunta del secondo ordine [4].

---

regolari, così anche sulle varietà V_l d'irregolarità bidimensionale nulla, le V_{l-1} di singolarità logaritmica per un integrale di 3ª specie sono linearmente dipendenti. Questa proprietà si prova a sua volta per induzione supponendola valida per le sezioni iperpiane di V_l (che hanno anch'esse l'irregolarità bidimensionale nulla) e approfittando di noti criterî d'equivalenza per le V_{l-1} contenute in V_l.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1913.

(2) R. Accademia dei Lincei, Memorie, vol. III della serie 5ª.

(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX della serie 5ª; citeremo questa Nota con la notazione (N_1).

(4) Nella Nota: *Sul problema di Dirichlet* ecc., id. id., la citeremo colla notazione (N_2).