ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Il teorema dimostrato in questo numero è invertibile nel senso che se la varietà V_k possiede un sistema ∞^l d'indice 1 di M_{k-l} algebriche avente l'irregolarità bidimensionale $\geq l+1$, essa possiede $l+1$ integrali distinti di 1ª specie, funzionalmente dipendenti. Basta osservare che su una V_l imagine del sistema ∞^l, $l+1$ integrali di 1ª specie sono sempre funzionalmente dipendenti, e tener conto della sostituzione razionale che trasforma gli integrali di V_l in integrali di V_k.

Matematica. — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

1. Lo studio della Memoria del Dini: *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine* [2], nella quale trovansi stabiliti, sotto molteplici forme, numerosi teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche lineari del secondo ordine, mi incita alla pubblicazione della presente Nota in cui, ai sopradetti teoremi del Maestro, ne aggiungo dei nuovi di indole diversa. I teoremi qui enunciati non dipendono da speciali ipotesi fatte sui coefficienti dell'equazione, nè dalla presupposta conoscenza di integrali particolari dell'equazione data o dell'aggiunta.

Ai risultati di questa Nota pervengo basandomi sopra un *teorema di confronto* fra due equazioni ellittiche o paraboliche del secondo ordine che è un'estensione di quello da me stabilito, confrontando due equazioni ellittiche entrambe ed autoaggiunte, nella Nota: *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni* ecc. [3]; del quale teorema già feci applicazione per la determinazione di campi per cui vale il teorema di unicità nel problema di Dirichlet per la più generale equazione ellittica autoaggiunta del secondo ordine [4].

---

regolari, così anche sulle varietà V_l d'irregolarità bidimensionale nulla, le V_{l-1} di singolarità logaritmica per un integrale di 3ª specie sono linearmente dipendenti. Questa proprietà si prova a sua volta per induzione supponendola valida per le sezioni iperpiane di V_l (che hanno anch'esse l'irregolarità bidimensionale nulla) e approfittando di noti criterî d'equivalenza per le V_{l-1} contenute in V_l.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1913.

(2) R. Accademia dei Lincei, Memorie, vol. III della serie 5ª.

(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX della serie 5ª; citeremo questa Nota con la notazione (N_1).

(4) Nella Nota: *Sul problema di Dirichlet* ecc., id. id., la citeremo colla notazione (N_2).

2. Stabiliamo anzitutto il teorema di confronto di cui abbiamo discorso; e fin da ora avvertiamo che: *quando diremo che una data equazione è ellittica (parabolica), intenderemo ch'essa lo sia sempre, cioè in tutto il campo di definizione dei suoi coefficienti.*

Si abbia l'equazione ellittica o parabolica

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{L}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\ + 2h\frac{\partial u}{\partial x} + 2k\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{A}u = 0,$$

per la quale supponiamo che le funzioni

$$a\,,\, b\,,\, c\,,\, \frac{\partial a}{\partial x}\,,\, \frac{\partial b}{\partial x}\,,\, \frac{\partial b}{\partial y}\,,\, \frac{\partial c}{\partial y}\,,\, h\,,\, k\,,\, \frac{\partial h}{\partial x}\,,\, \frac{\partial k}{\partial y}\,,\, \mathrm{A}\,,$$

siano finite e continue in un certo campo Γ del piano $x\,,y$, e confrontiamola coll'equazione ellittica o parabolica autoaggiunta

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathrm{T}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(t\frac{\partial u}{\partial x} + \tau\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{B}u = 0\,,$$

per la quale supponiamo che nello stesso campo Γ le funzioni

$$\theta\,,\, t\,,\, \tau\,,\, \frac{\partial \theta}{\partial x}\,,\, \frac{\partial t}{\partial x}\,,\, \frac{\partial t}{\partial y}\,,\, \frac{\partial \tau}{\partial y}\,,\, \mathrm{B}\,,$$

siano finite e continue. Supponiamo inoltre che sia, in Γ, $a > 0$, $\theta > 0$.

Il teorema di confronto si enuncia nel modo seguente:

Se in un campo C *di* Γ *connesso e finito, di contorno* c, *è*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a \geq \theta\,,\ c \geq \tau\,,\ (a-\theta)(c-\tau) - (b-t)^2 \geq 0\,, \\ \mathrm{A} - \dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{\partial k}{\partial y} \leq \mathrm{B}, \end{array} \right.$$

ed esiste una soluzione u *della* (I) *identicamente nulla sul contorno* c *di* C — *non identicamente nulla in* C — *non potrà esistere una soluzione* v *della* (II) *per la quale il rapporto*

$$\frac{u}{v}$$

si conservi finito in C *e ivi non soddisfi identicamente alle due equazioni:*

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + t\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\,, \\ t\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \tau\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\,. \end{array} \right.$$

Il teorema si dimostra subito [cfr. (N_1)] partendo dall'eguaglianza

$$(3)\qquad \iint\left\{a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy= \\ =\iint\left(A-\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial y}\right)u^2\,dx\,dy\,,$$

nella quale, ora come sempre in seguito, intendiamo gli integrali doppî estesi al campo C. Posto, invero,

$$A-\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial y}=H\,,$$

dall'ipotesi che il rapporto $\frac{u}{v}$ si conserva finito in C segue che $\frac{u^2}{v}$ si annulla su c e che si potrà nella (3), in luogo di Hu^2, porre la sua eguale

$$-\frac{u^2}{v}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial v}{\partial x}+t\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(t\frac{\partial v}{\partial x}+\tau\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}-(B-H)\,u^2\,,$$

dopo di che l'eguaglianza (3) si tradurrà [cfr. (N_1)] nella seguente:

$$(4)\qquad \iint\left\{(a-\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2(b-t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(c-\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+ \\ \iint\left\{\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2t\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\tau\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+ \\ +\iint(B-H)\,u^2\,dx\,dy=0\,.$$

Distinguiamo a questo punto il caso in cui la (II) è ellittica dall'altro in cui è parabolica. Nel primo caso, per le diseguaglianze (1), essendo $\theta>0$, si deduce necessariamente, dalla (4),

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0\,,$$

cioè che il rapporto $\frac{u}{v}$ è costante in C e quindi ivi soddisfa alle equazioni (2). Nel secondo caso l'integrale intermedio nel primo membro della (4) si può scrivere

$$\iint\frac{1}{\theta}\left\{\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+t\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}^2dx\,dy\,,$$

per cui dalla (4) seguirà di nuovo che il rapporto $\frac{u}{v}$ soddisfa in C alle equazioni (2), in questo caso coincidenti. Il teorema di confronto è dunque dimostrato.

3. Supponiamo in questo numero che l'equazione (II) sia ellittica, valendo le tre prime delle diseguaglianze (1), risulterà ellittica anche l'equazione (I) e dal teorema dimostrato segue il corollario:

In un campo C *in cui esiste una soluzione della* (I) *o della* (II) *nulla sul contorno — non identicamente nulla in* C — *ogni soluzione della* (II) *non può sempre conservarsi diversa da zero.*

Da questo corollario si deduce che: *Tutti i teoremi di unicità ottenuti in* (N_2) *relativi agli integrali di un'equazione ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del 2° ordine che prendono valori assegnati sul contorno di un campo connesso, valgono per l'equazione ellittica affatto generale* $L(z) = f(x, y)$, *se la quantità in* (N_2) *indicata con* M *esprime il massimo di*

$$H(x, y) \equiv A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y}$$ (1).

4. Supponiamo ora, sino alla fine, che l'equazione (II) sia parabolica. L'equazione (I), sempre nell'ipotesi che valgano le (1), potrà essere ellittica o parabolica; e dal teorema del n. 2 segue il corollario:

In un campo C *in cui esiste una soluzione della* (I) *o della* (II) *nulla sul contorno* c, *non totalmente costituito da linee caratteristiche per la* (II), *ogni soluzione di questa non può sempre conservarsi diversa da zero.*

E invero, nell'ipotesi che una soluzione v della (II) sia sempre in C diversa da zero e una soluzione u della (I) sia nulla sul contorno c di C, dal teorema del n. 2 segue essere, in C,

$$u = v\,\Phi(\varphi)\,,$$

dove φ designa una soluzione particolare delle equazioni coincidenti (2) e Φ una funzione di φ. Se ne deduce che su c risulterà $\Phi(\varphi) = 0$, e quindi ch'esso è totalmente costituito da linee caratteristiche per la (II) (2).

Dal corollario ora stabilito si deduce evidentemente che per quei campi C il cui contorno non è totalmente costituito da linee caratteristiche della equazione (II) e pei quali si sia assicurata l'esistenza di una soluzione della (II) ivi sempre diversa da zero, valgono i teoremi di unicità relativi

(1) Questa osservazione è stata anche fatta (indipendentemente da me) dal professore E. E. Levi che me la comunicò per lettera.

(2) Osserviamo che se v è una soluzione della (II) lo è anche $v\,\Phi(\varphi)$, per cui, se le equazioni (I) e (II) non hanno soluzioni comuni (circostanza questa che si può accertare, nel caso di una conveniente derivabilità dei coefficienti delle equazioni, con soli calcoli algebrici e di derivazione) è lecito nell'enunciato del corollario ora stabilito tacere la condizione che c non deve essere totalmente costituito da linee caratteristiche della equazione (II).

Osserviamo ancora che la medesima condizione si può anche sopprimere nell'ipotesi che sia, in tutto C, $H(x, y) < B(x, y)$.

agli integrali dell'equazione $L(z) = f(x, y)$ che prendono sul contorno valori assegnati. Passiamo perciò alla determinazione di campi nei quali esistono soluzioni della (II), ivi sempre diverse da zero.

5. A tale scopo supponiamo che la regione Γ, nella quale consideriamo le due equazioni (I) e (II), sia quella in cui è sempre finito, continuo, ad un sol valore, un integrale $\varphi(x, y)$ delle due equazioni coincidenti (2), per il quale risulti altresì, in tutto Γ, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$.

Sarà allora lecito, per tutto Γ, il cambiamento di variabili indipendenti

$$\xi = x \quad , \quad \eta = \varphi(x, y),$$
$$x = \xi \quad , \quad y = \psi(\xi, \eta),$$

e nelle variabili ξ e η l'equazione (II) si scrive

$$\text{(II}') \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \beta u = 0,$$

dove, avendo posto

$$r = \theta \{\xi, \psi(\xi, \eta)\} \quad , \quad p = \theta_x \{\xi, \psi(\xi, \eta)\} + t_y \{\xi, \psi(\xi, \eta)\},$$
$$q = B\{\xi, \psi(\xi, \eta)\},$$

è

$$\alpha = e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{p(s, \eta)}{r(s, \eta)} ds} \quad , \quad \beta = \frac{q}{r} e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{p(s, \eta)}{r(s, \eta)} ds},$$

mentre il campo Γ si trasforma in un campo Γ' del piano ξ, η.

Diciamo M il massimo di β in Γ' e m il minimo di α. Vogliamo dimostrare che in un campo R' di Γ' limitato da due caratteristiche $\eta = \eta_0$, $\eta = \eta_1$ $(\eta_0 < \eta_1)$ e da due curve c_0 e c_1 rispettivamente di equazioni

$$\xi = m_0(\eta) \quad , \quad \xi = m_1(\eta) \quad , \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta_1,$$

con $m_0(\eta)$ e $m_1(\eta)$ funzioni finite, continue, ad un sol valore, per le quali, essendo $m_0(\eta) \leq m_1(\eta)$, risulta

$$m_1(\eta) - m_0(\eta) \leq \delta < \pi \sqrt{\frac{m}{M}} \text{ (}^1\text{)},$$

esiste un integrale della (II') ivi sempre diverso da zero.

(1) La diseguaglianza scritta perderebbe senso nel caso di M negativo o nullo; in questo caso dobbiamo intendere che la differenza $m_1(\eta) - m_0(\eta)$ non è soggetta ad alcuna limitazione, all'infuori di quella proveniente dalla condizione che le curve c_1 e c_0 devono appartenere alla regione Γ'.

Diciamo perciò v_1 e v_2 due integrali *indipendenti* dell'equazione (II'), e consideriamo l'integrale della medesima equazione

$$v(\xi\,,\eta) \equiv v_2 \{ m_0(\eta) - \sigma\,, \eta \} \, v_1(\xi\,,\eta) - v_1 \{ m_0(\eta) - \sigma\,, \eta \} \, v_2(\xi\,,\eta)\,,$$

che si annulla sopra la curva $\xi = m_0(\eta) - \sigma$, avendo designato con σ una costante piccolissima minore di

$$\pi \sqrt{\frac{m}{\mathrm{M}}} - \delta\,.$$

Dico che l'integrale $v(\xi\,,\eta)$ è sempre diverso da zero in R'. Ed invero, se $\overline{\eta}$ è l'ordinata di un punto di R' in cui si annulla v, l'equazione ordinaria del second'ordine

$$\frac{d}{d\xi}\left\{ \alpha(\xi\,,\overline{\eta})\,\frac{du}{d\xi} \right\} + \beta(\xi\,,\overline{\eta})\,u = 0$$

possiederebbe l'integrale $v(\xi\,,\overline{\eta})$ avente due zeri consecutivi distanti fra loro per meno di $\pi \sqrt{\frac{m}{\mathrm{M}}}$; il che è impossibile, come subito deriva dal teorema di confronto di Sturm per le equazioni ordinarie.

Ritornando alle variabili x e y, possiamo, dopo ciò, enunciare il teorema:

Detti m *e* M *il minimo e il massimo in* Γ *rispettivamente delle funzioni*

$$\alpha(x\,,y) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\theta_x(s\,,y) + t_y(s\,,y)}{\theta(s\,,y)}\,ds}\,,$$

$$\beta(x\,,y) = \frac{\mathrm{B}(x\,,y)}{\theta(x\,,y)}\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\theta_x(s\,,y) + t_y(s\,,y)}{\theta(s\,,y)}\,ds}\,,$$

per ogni campo R *di* Γ *limitato da due caratteristiche* $\varphi = \eta_0\,, \varphi = \eta_1$ *e da due curve* c_1 *e* c_2, *non incrociantisi mai, che, incontrate ciascuna in un sol punto da ogni caratteristica* $\varphi = \eta\ (\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1)$, *staccano sopra questa un arco la cui proiezione ortogonale sull'asse* x *non supera una quantità* $\delta < \pi \sqrt{\frac{m}{\mathrm{M}}}$, *esiste un integrale dell'equazione* (II) *ivi sempre diverso da zero.*

6. Ritornando ora al confronto fra l'equazione (I) e la (II), supponiamo in primo luogo che l'equazione (I) sia ellittica. Dal teorema ultimamente enunciato segue l'unicità dell'integrale dell'equazione $\mathrm{L}(z) = f$ assoggettato a prendere sul contorno c di un campo C. *tutto contenuto in un campo* R, valori assegnati. Osserviamo l'arbitrarietà che sussiste nella scelta della famiglia $\varphi(x\,,y) = \text{cost}$ delle caratteristiche per l'equazione (II) quando si voglia disporre della scelta dei coefficienti di questa. Potremo arbitraria-

mente assegnare in Γ una funzione φ che, colle sue derivate prime, sia ivi finita e continua e abbia sempre $\varphi_y \neq 0$; se $\theta(x, y)$ designa una seconda funzione arbitraria sempre positiva in Γ e χ il quoziente $-(\varphi_x : \varphi_y)$, prendendo

$$t = -\theta\chi \quad , \quad \tau = \theta\chi^2 ,$$

l'equazione (II) avrà appunto le $\varphi(x, y) = \text{cost}$ come caratteristiche. Per potere applicare il teorema di confronto fra le equazioni (I) e (II), la funzione $\theta(x, y)$ dovrà poi essere scelta fra le infinite funzioni sempre positive in Γ, ivi soddisfacenti alle seguenti diseguaglianze:

$$a \geq \theta \quad , \quad c \geq \theta\chi^2 \quad , \quad (a - \theta)(c - \theta\chi^2) - (b - \theta\chi)^2 \geq 0 ,$$

prendendo infine per B una qualunque funzione in tutto Γ non inferiore a $H(x, y)$.

Ne segue il teorema:

Assegnata arbitrariamente in Γ una famiglia Φ di curve continue a tangente variabile con continuità non mai parallela all'asse y, delle quali per ogni punto di Γ ne passa una e una sola, si può corrispondentemente determinare (in infiniti modi) un numero positivo Δ che gode della seguente proprietà: Sia dato un campo C di Γ; se il primo e l'ultimo punto di incontro di ogni curva Φ, che invade C, col contorno c di C, limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sopra l'asse x non supera una quantità $\delta < \Delta$, è unico in C l'integrale della equazione ellittica $L(z) = f$ che su c prende valori prescritti. La precisa determinazione di Δ non richiede che la ricerca del minimo e del massimo in Γ per le funzioni $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ del n. precedente; designando questi rispettivamente con m e M, si ha $\Delta = \pi \sqrt{\dfrac{m}{M}}$ (¹).

7. Supponiamo ora l'equazione (I) parabolica. Le due equazioni paraboliche (I) e (II), fra i cui coefficienti sussistono le diseguaglianze (1), hanno a comune le caratteristiche; segue dunque il teorema:

L'equazione $L(z) = f$ sia parabolica in un campo Γ per ogni punto del quale passa una ed una sola delle sue caratteristiche Φ di tangente non mai parallela all'asse y, si può sempre determinare (in infiniti modi) un numero positivo Δ che gode della seguente proprietà: Sia dato un campo C di Γ; se il primo e l'ultimo punto di incontro di ogni caratteristica, che invade C, col contorno c di C, limitano su questa un arco

(¹) È ben nota l'importanza che ai teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche ha conferito la Memoria di E. E. Levi: *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. Memorie della Società italiana delle Scienze, tomo XVI della serie 3ª.

la cui proiezione ortogonale sopra l'asse x non supera una quantità $\delta < \varDelta$, è unico in C l'integrale dell'equazione che su c prende valori prescritti. La precisa determinazione di $\varDelta$ non richiede che la ricerca del minimo e del massimo in Γ per le funzioni $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ del n. 5; designando questi, rispettivamente, con m e M, si ha $\varDelta = \pi \sqrt{\frac{m}{M}}$.

Meccanica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota III del dott. Lucio Silla, presentata dal Socio Vito Volterra [1].

Nella presente Nota mi propongo di completare la soluzione del problema di elasticità che ho incominciato a risolvere nelle due Note precedenti [2], dimostrando cioè che le deformazioni indotte nei punti di un corpo elastico isotropo S dagli spostamenti arbitrariamente dati sulla superficie σ del corpo, si possono sempre concepire come dovute alla sovrapposizione di un numero finito od infinito di deformazioni elementari, le quali dipendono soltanto dai caratteri geometrici della superficie σ e dalle costanti di isotropia del corpo elastico considerato.

Ricorderò dapprima che ho, innanzi tutto, risoluto il primo problema fondamentale dell'elasticità, mediante semplici strati elastici $V_1(\xi, \eta, \zeta)$, $V_2(\xi, \eta, \zeta)$, $V_3(\xi, \eta, \zeta)$ (ξ, η, ζ denotando le coordinate del punto nel quale si considera la deformazione del corpo); ed in proposito ho dimostrato che la risoluzione di quel problema dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di prima specie, cioè:

$$(1)\quad \begin{cases} u(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{ u'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta) + \\ \qquad\qquad + v'(\cdots) \cdot \psi(\alpha, \beta) + w'(\cdots) \cdot \chi(\alpha, \beta) \} \, d\sigma, \\ v(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma u''(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma, \\ w(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma u'''(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma, \end{cases}$$

dove $u(\alpha', \beta')$, $v(\alpha', \beta')$, $w(\alpha', \beta')$ sono funzioni *date* dei punti (α', β') di σ, le quali rappresentano le componenti, rispetto agli assi coordinati, degli spostamenti assegnati in superficie; $u', v', w', u'', \ldots, u''', \ldots$ indicano gli

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1913.

[2] *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 1° sem. 1913, pp. 12-18 e pp. 216-222.