ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

la cui proiezione ortogonale sopra l'asse x non supera una quantità $\delta < \varDelta$, è unico in C l'integrale dell'equazione che su c prende valori prescritti. La precisa determinazione di $\varDelta$ non richiede che la ricerca del minimo e del massimo in Γ per le funzioni $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ del n. 5; designando questi, rispettivamente, con m e M, si ha $\varDelta = \pi \sqrt{\dfrac{m}{\mathrm{M}}}$.

Meccanica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota III del dott. Lucio Silla, presentata dal Socio Vito Volterra [1].

Nella presente Nota mi propongo di completare la soluzione del problema di elasticità che ho incominciato a risolvere nelle due Note precedenti [2], dimostrando cioè che le deformazioni indotte nei punti di un corpo elastico isotropo S dagli spostamenti arbitrariamente dati sulla superficie σ del corpo, si possono sempre concepire come dovute alla sovrapposizione di un numero finito od infinito di deformazioni elementari, le quali dipendono soltanto dai caratteri geometrici della superficie σ e dalle costanti di isotropia del corpo elastico considerato.

Ricorderò dapprima che ho, innanzi tutto, risoluto il primo problema fondamentale dell'elasticità, mediante semplici strati elastici $\mathrm{V}_1(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathrm{V}_2(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathrm{V}_3(\xi, \eta, \zeta)$ (ξ, η, ζ denotando le coordinate del punto nel quale si considera la deformazione del corpo); ed in proposito ho dimostrato che la risoluzione di quel problema dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di prima specie, cioè:

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u(\alpha', \beta') &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ u'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta) + \\
&\qquad + v'(\cdots) \cdot \psi(\alpha, \beta) + w'(\cdots) \cdot \chi(\alpha, \beta) \}\, d\sigma, \\
v(\alpha', \beta') &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, u''(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma, \\
w(\alpha', \beta') &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, u'''(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma,
\end{aligned}
\right.
$$

dove $u(\alpha', \beta')$, $v(\alpha', \beta')$, $w(\alpha', \beta')$ sono funzioni *date* dei punti (α', β') di σ, le quali rappresentano le componenti, rispetto agli assi coordinati, degli spostamenti assegnati in superficie; $u', v', w', u'', \ldots, u''', \ldots$ indicano gli

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1913.

[2] *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 1° sem. 1913, pp. 12-18 e pp. 216-222.

integrali singolari delle equazioni dell'equilibrio elastico trovati dal Somigliana, e $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ le densità incognite dei tre strati elastici richiesti.

Si è veduto che il sistema di equazioni integrali (1) è certamente risolvibile, ed anzi ammette una ed una sola soluzione, sempre quando le date funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ dei punti (α, β) della superficie σ soddisfino ad una certa condizione analitica, che è pure la condizione necessaria e sufficiente per la risoluzione del primo problema fondamentale dell'elasticità mediante semplici strati elastici.

Ora, per esaurire la ricerca, dovremo applicare alcuni risultati sulla teoria dei sistemi di equazioni integrali di prima specie, che si trovano in una mia recente Nota [1] nella quale, veramente, sono state considerate funzioni ortogonali di una sola variabile e nuclei dipendenti da una sola coppia di parametri. Ma i ragionamenti fatti e i risultati ottenuti, alcuni dei quali richiamerò in succinto qui appresso, sussistono, qualunque sia il numero delle variabili da cui dipendono le funzioni ortogonali o il numero delle coppie di parametri che figurano nei nuclei del sistema di equazioni integrali considerato.

Sia proposto il sistema di equazioni integrali di prima specie:

$$g_i(s) = \int_0^1 \sum_1^n {}_r \, \mathrm{K}_{ir}(s, t)\, h_r(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n); \tag{2}$$

esso equivale, come è noto, all'unica equazione integrale di prima specie:

$$g(s) = \int_0^n \mathrm{K}(s, t)\, h(t)\, dt. \tag{3}$$

Nel caso in cui il nucleo $\mathrm{K}(s, t)$ di questa equazione risulti simmetrico (ciò che avverrà certamente se le $\mathrm{K}_{ir}(s, t)$ sono funzioni simmetriche in s, t e se, inoltre, $\mathrm{K}_{ir}(s, t) = \mathrm{K}_{ri}(s, t)$) allora, indicata con

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_i(s), \dots$$

l'unica serie delle corrispondenti autofunzioni (di queste, una, almeno, esisterà indubbiamente) [2], e con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$$

[1] *Sui sistemi di equazioni integrali di prima specie*, id. 2° sem. 1913, pp. 13-20.

[2] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Math. Ann., Bd. 63, pp. 433-476, § 11.

i relativi autovalori, si sa che ad ogni autofunzione $\varphi_i(s)$ corrisponderà un sistema di n autofunzioni date dalle formole:

$$\varphi_{i\mu}(s) = \lambda_i \int_0^1 \sum_1^n{}_r \, K_{\mu r}(s, t) \, \varphi_{ir}(t) \, dt \tag{4}$$

$$(\mu = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Inoltre, se esiste una soluzione $h(t)$ dell'equazione (3), essa è suscettibile dell'espressione seguente:

$$h(t) = \sum_1^{n_1}{}_i \, a_i \, \lambda_i \, \varphi_i(t) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i \, a_i \, \lambda_i \, \varphi_i(t) + \cdots$$

dove

$$a_i = \int_0^n g(\xi) \, \varphi_i(\xi) \, d\xi = \int_0^1 \sum_1^n{}_r \, g_r(\xi) \, \varphi_{ir}(\xi) \, d\xi ; \tag{5}$$

ed allora, per la corrispondente soluzione del sistema (2), si ottiene:

$$h_r(t) = \sum_1^{n_1}{}_i \, a_i \, \lambda_i \, \varphi_{ir}(t) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i \, a_i \, \lambda_i \, \varphi_{ir}(t) + \cdots \tag{6}$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Ricorderò, infine, che i numeri $n_1, n_2, \dots$ sono determinati a norma del teorema del Weyl e che le serie dei secondi membri *convergono uniformemente in generale* nell'intervallo $(0, 1)$.

Riferendoci ora al sistema di equazioni integrali (1), da noi studiato fino dalla I Nota, possiamo affermare che, in virtù della simmetria delle funzioni (nuclei) $u', v', w', \dots, u'', \dots, u''', \dots$, e tenuto conto che il determinante di queste nove quantità è simmetrico rispetto alla diagonale principale, esisteranno almeno una terna di funzioni (autofunzioni) dei punti (α, β) della superficie σ:

$$\varphi_{i1}(\alpha, \beta) \quad , \quad \varphi_{i2}(\alpha, \beta) \quad , \quad \varphi_{i3}(\alpha, \beta) ,$$

ed una corrispondente costante (autovalore) λ_i, tali che, a norma delle (4), si avrà:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{i1}(\alpha', \beta') &= \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_\sigma \Sigma u'(\alpha, \beta ; \alpha', \beta') \, . \, \varphi_{i1}(\alpha, \beta) \, d\sigma , \\ \varphi_{i2}(\alpha', \beta') &= \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_\sigma \Sigma u''(\alpha, \beta ; \alpha', \beta') \, . \, \varphi_{i1}(\alpha, \beta) \, d\sigma , \\ \varphi_{i3}(\alpha', \beta') &= \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_\sigma \Sigma u'''(\alpha, \beta ; \alpha', \beta') \, . \, \varphi_{i1}(\alpha, \beta) \, d\sigma . \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Inoltre, a causa della dimostrata esistenza di un'unica soluzione

$$\varphi(\alpha\,,\beta)\quad,\quad \psi(\alpha\,,\beta)\quad,\quad \chi(\alpha\,,\beta)$$

del sistema di equazioni integrali (1) e, nell'ipòtesi ammessa, che le date funzioni $u(\alpha\,,\beta)$, $v(\alpha\,,\beta)$ e $w(\alpha\,,\beta)$ soddisfino alle condizioni necessarie e sufficienti stabilite nelle due precedenti Note, e ponendo, come in (5),

$$a_i = \int_\sigma \Sigma u(\alpha\,,\beta)\,\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta)\,d\sigma\,,$$

si avrà, applicando le (6),

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha\,,\beta) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,\lambda_i\,\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\,\lambda_i\,\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta) + \cdots \\ \psi(\alpha\,,\beta) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,\lambda_i\,\varphi_{i2}(\alpha\,,\beta) + \cdots \\ \chi(\alpha\,,\beta) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,\lambda_i\,\varphi_{i3}(\alpha\,,\beta) + \cdots \end{cases}$$

e ricordiamo che le serie dei secondi membri sono uniformemente convergenti in generale sopra i punti della superficie σ.

Le tre precedenti formole ci dànno le densità dei tre strati elastici semplici, che risolvono il primo problema fondamentale dell'elasticità, espresse mediante sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

Seguendo le stesse notazioni che abbiamo adottate nella I Nota, possiamo quindi costruire gli strati elastici seguenti:

$$\mathrm{V}_1(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi(\alpha\,,\beta)\,u'\,d\sigma\,,$$

$$\mathrm{V}_2(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi(\alpha\,,\beta)\,u''d\sigma\,,$$

$$\mathrm{V}_3(\xi\,.\,\eta\,,\zeta) = \cdots;$$

ovvero, per le (8), e integrando per serie:

$$\mathrm{V}_1(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i \left\{ \frac{\lambda_i}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta)\,u'\,d\sigma \right\} + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i \left\{ \cdots \right\} + \cdots$$

$$\mathrm{V}_2(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i \left\{ \frac{\lambda_i}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta)\,u''d\sigma \right\} + \cdots$$

$$\mathrm{V}_3(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \cdots$$

Se poniamo, per brevità,

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \dfrac{\lambda_i}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta)\,u'\,d\sigma\,, \\ \Psi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \dfrac{\lambda_i}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,\varphi_{i1}(\alpha\,,\beta)\,u''d\sigma\,, \\ X_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \cdots\,, \end{cases}$$

avremo, infine:

$$(10)\quad \begin{cases} V_1(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \displaystyle\sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,\Phi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_i\,\Phi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) + \cdots \\ V_2(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \displaystyle\sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,\Psi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) + \cdots \\ V_3(\xi\,,\eta\,,\zeta) = \displaystyle\sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\,X_i(\xi\,,\eta\,,\zeta) + \cdots \end{cases}$$

Le funzioni $\Phi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, $\Psi_i(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ e $X_i(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, espresse dalle formole (9), rappresentano un sistema di deformazioni (strati elastici) che, in virtù delle (7), assumono in ogni punto $(\alpha\,,\beta)$ della superficie σ del corpo elastico S considerato, rispettivamente i valori $\varphi_{i1}(\alpha'\,,\beta')$, $\varphi_{i2}(\alpha'\,,\beta')$, $\varphi_{i3}(\alpha'\,,\beta')$: noi diremo che le Φ_i, Ψ_i, X_i costituiscono una *deformazione fondamentale* del corpo elastico S.

Le funzioni $V_1(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, $V_2(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ e $V_3(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ coincideranno nei punti $(\alpha'\,,\beta')$ di σ, a norma delle (1), con le date funzioni (spostamenti in superficie) $u(\alpha'\,,\beta')$, $v(\alpha'\,,\beta')$, $w(\alpha'\,,\beta')$ e costituiscono, quindi, le componenti della deformazione del corpo elastico, corrispondente agli spostamenti u, v e w dati ad arbitrio sui punti di σ.

Riassumendo, pertanto, le formole (10) ci esprimono la seguente legge di equilibrio di un corpo elastico isotropo, subordinatamente alle ipotesi fatte nella I Nota:

se le funzioni $u(\alpha\,,\beta)$, $v(\alpha\,,\beta)$ e $w(\alpha\,,\beta)$, che rappresentano gli spostamenti dati ad arbitrio su i punti della superficie σ del corpo S, *sono tali che gli pseudo-doppî strati elastici aventi per densità le funzioni u, v e w ammettono le corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ, e da entrambe le faccie della superficie stessa, allora la deformazione di componenti $V_1(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, $V_2(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ e $V_3(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, prodotta nei punti $(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ del corpo* S, *si può sempre considerare come dovuta alla sovrapposizione di un numero finito od infinito di deformazioni fondamentali.*