ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Le ipotesi sugli sforzi interni nei mezzi, ponderabili, isotropi.* Nota II di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

I. Anzitutto, osserviamo che nelle (3) (vedasi Nota I) figurano ottantuno coefficienti, il cui numero si riduce subito a cinquantaquattro, apparentemente distinti, qualora non si ammetta l'esistenza di momenti specifici di massa, giacchè allora $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$. Dapprima studieremo appunto questo caso, cioè il caso dell'assenza di momenti specifici di massa. Allora sarà, intanto,

$$h_{rs}^{(ij)} = h_{sr}^{(ij)} \qquad (i, j, r, s = 1, 2, 3).$$

Si venga, poi, all'*inversione degli assi* x, y, z. Mediante inversione del solo asse x, dovremo avere

$$X'_{-x} = X_x \quad , \quad Y_{-x} = -Y_x \quad , \quad Z_{-x} = -Z_x ;$$

mediante, invece, inversione del solo asse y,

$$X_{-y} = -X_y \quad , \quad Y'_{-y} = Y_y \quad , \quad Z_{-y} = -Z_y ;$$

ed invece, finalmente, mediante inversione del solo asse z, dovremo avere

$$X_{-z} = -X_z \quad , \quad Y_{-z} = -Y_z \quad , \quad Z'_{-z} = Z_z ,$$

con l'avvertenza, naturalmente, che, invertendo un asse, si prenda, come nuova terna d'assi di riferimento, la terna costituita dai due assi non invertiti e da quello invertito (perciò abbiamo apposto un apice alle X_{-x}, Y_{-y}, Z_{-z}). Mediante coteste inversioni, tenendo presente che i coefficienti h dovrebbero essere isotropi e proprî soltanto del corpo e della sua temperatura, resulteranno diverse da zero soltanto le h seguenti:

$$h_{ss}^{(rr)} \quad , \quad h_{rs}^{(rs)} \quad , \quad h_{sr}^{(rs)} \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

I nostri coefficienti si riducono così, intanto, a quindici apparentemente distinti. Ora, mediante tutte le possibili *permutazioni degli assi* x, y, z fra loro, tenendo sempre presente la natura delle h, avremo

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & h_{11}^{(11)} = h_{22}^{(22)} = h_{33}^{(33)} \\ & h_{22}^{(11)} = h_{33}^{(22)} = h_{11}^{(33)} = h_{33}^{(11)} = h_{11}^{(22)} = h_{22}^{(33)} \\ & h_{12}^{(12)} = h_{23}^{(23)} = h_{31}^{(31)} = h_{13}^{(13)} = h_{21}^{(21)} = h_{32}^{(32)} . \end{aligned} \right.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1913.

Indicheremo con $h^{(s)}$ $(s=1\,,2\,,3)$ il valore comune delle h che figurano nella linea s^{ma} del quadro (4) (a cominciare da quella ove trovasi $h_{11}^{(11)}$).

Avremo dunque

$$\left\{\begin{array}{l} X_x = h^{(1)}\dfrac{\partial u}{\partial x} + h^{(2)}\dfrac{\partial v}{\partial y} + h^{(2)}\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_x = X_y = h^{(3)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Potremo anche scrivere

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_x = h_1\theta + h_2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_x = X_y = h_3\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

avendo posto

$$h_1 = h^{(2)}\quad,\quad h_2 = h^{(1)} - h^{(2)}\quad,\quad h_3 = h^{(3)}.$$

Rimane da dimostrare che

$$h_2 = 2h_3\,.$$

Si consideri, perciò, in corrispondenza del punto $(x\,,y\,,z)$, la terna delle dilatazioni principali [1], della quale gli assi verranno indicati con $n_1\,,n_2\,,n_3$. Sia

	n_1	n_2	n_3
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

il quadro relativo ai coseni direttori dei suddetti assi.

Siano, inoltre, $u_1\,,u_2\,,u_3$ le componenti del vettore $(u\,,v\,,w)$ rispetto alla terna delle dilatazioni principali in discorso, ed N_{rs} $(r\,,s=1\,,2\,,3)$ le componenti degli sforzi interni specifici relativi a facce normali, nell'origine, agli assi della terna medesima. Fra le N_{rs} e le $\dfrac{\partial u_1}{\partial n_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial n_2}, \dots, \dfrac{\partial u_3}{\partial n_3}$ dovranno

[1] Più precisamente delle dilatazioni principali, ove si tratti di solidi elastici, e, invece, delle velocità di dilatazione principali, ove si tratti di fluidi viscosi.

aversi relazioni dello stesso tipo (5), ed i coefficienti, per loro natura, saranno gli stessi. E poichè, nell'origine della terna delle dilatazioni principali, si ha

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_1}+\frac{\partial u_1}{\partial n_2}=\frac{\partial u_3}{\partial n_2}+\frac{\partial u_2}{\partial n_3}=\frac{\partial u_1}{\partial n_3}+\frac{\partial u_3}{\partial n_1}=0\,,$$

avremo

(6) $$N_{12}=N_{21}=N_{13}=N_{31}=N_{23}=N_{32}=0\,,$$

cioè coincidenza della terna delle dilatazioni principali con quella delle pressioni principali. Inoltre

(7) $$\left\{\begin{aligned} N_{11}&=h_1\theta+h_2\frac{\partial u_1}{\partial n_1}\\ N_{22}&=h_1\theta+h_2\frac{\partial u_2}{\partial n_2}\\ N_{33}&=h_1\theta+h_2\frac{\partial u_3}{\partial n_3}.\end{aligned}\right.$$

Ora si osservi che, per il noto *teorema del Cauchy*, ed in virtù delle (6), si ha

$$N_{ix}=\alpha_i N_{ii}\quad,\quad N_{iy}=\beta_i N_{ii}\quad,\quad N_{iz}=\gamma_i N_{ii}$$
$$(i=1\,,2\,,3)$$

avendo indicato con N_{ix} le componenti, rispettivamente secondo gli assi $n_1\,,n_2\,,n_3$, dello sforzo specifico che insiste sulla faccia elementare, positiva, normale all'asse x. Quindi, poichè

$$X_r=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i N_{ir}\quad,\quad Y_r=\sum_{i=1}^{3}\beta_i N_{ir}\quad,\quad Z_r=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i N_{ir}$$
$$(r=x\,,y\,,z)\,,$$

avremo

$$X_y=Y_x=h_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\,\beta_i\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\,,\quad Y_z=Z_y=h_2\sum_{i=1}^{3}\beta_i\,\gamma_i\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\,,$$
$$Z_x=X_z=h_2\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\,\alpha_i\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\,,$$

tenendo presenti le relazioni che sussistono fra i coseni direttori di una terna d'assi fra loro ortogonali. Ma, per note formule di passaggio, si ha

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\,\beta_i\frac{\partial u_i}{\partial n_i}\quad\text{e le analoghe,}$$

sicchè

$$X_y=Y_x=\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\quad\text{e le analoghe.}$$

Dunque, come volevasi dimostrare,

$$h_2 = 2h_3 .$$

Cioè, chiamando h_1 con λ ed h_2 con 2μ, abbiamo le formule (1).

II. Veniamo, finalmente, al secondo caso, cioè al caso in cui si ammetta l'esistenza di momenti specifici di massa.

Mediante *inversione degli assi* x, y, z (seguendo il procedimento già indicato) resultano anche qui diverse da zero soltanto le h seguenti:

$$h_{ss}^{(rr)} \quad , \quad h_{rs}^{(rs)} \quad , \quad h_{sr}^{(rs)} \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Mediante, poi, le *permutazioni degli assi* x, y, z, avremo

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & h_{11}^{(11)} = h_{22}^{(22)} = h_{33}^{(33)} \\ & h_{22}^{(11)} = h_{33}^{(22)} = h_{11}^{(33)} = h_{33}^{(11)} = h_{11}^{(22)} = h_{22}^{(33)} \\ & h_{12}^{(12)} = h_{23}^{(23)} = h_{31}^{(31)} = h_{13}^{(13)} = h_{21}^{(21)} = h_{32}^{(32)} \\ & h_{21}^{(12)} = h_{32}^{(23)} = h_{13}^{(31)} = h_{31}^{(13)} = h_{12}^{(21)} = h_{23}^{(32)} . \end{aligned} \right.$$

Indicheremo con $h^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ il valore comune delle h che figurano nella linea s^{ma} del quadro (8) (a cominciare da quella ove trovasi $h_{11}^{(11)}$). Sicchè avremo

$$\left\{ \begin{aligned} & X_x = \lambda\theta + h_2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & Y_x = h^{(3)} \frac{\partial v}{\partial x} + h^{(4)} \frac{\partial u}{\partial y} \\ & X_y = h^{(3)} \frac{\partial u}{\partial y} + h^{(4)} \frac{\partial v}{\partial x} \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

dove $\lambda = h^{(2)}$, $h_2 = h^{(1)} - h^{(2)}$.

Ovvero, ponendo $h^{(3)} = \mu + \nu$, $h^{(4)} = \mu - \nu$, avremo

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & X_x = \lambda\theta + h_2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

Rimane da dimostrare che

$$h_2 = 2\mu\,.$$

Si consideri, anche ora, in corrispondenza del punto (x, y, z), la terna delle dilatazioni principali, la quale ora non coincide più con quella delle pressioni principali. Le N_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ saranno date sempre dalle (7), mentre le altre N, le quali ora più non sono nulle, saranno date così:

$$\begin{cases} N_{21} = \quad \nu\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial n_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial n_2}\right) \\ N_{12} = -\nu\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial n_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial n_2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ora si ha

$$N_{sx} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i N_{si} \quad , \quad N_{sy} = \sum_{i=1}^{3} \beta_i N_{si} \quad , \quad N_{sz} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i N_{si}$$

$$(s = 1, 2, 3)\,.$$

Quindi, tenendo presenti le formule di passaggio considerate precedentemente e, inoltre, le seguenti,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial n_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial n_2}\right) + \\ \qquad + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial n_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n_3}\right) + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial n_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial n_1}\right) \\ \text{e le analoghe,} \end{cases}$$

resulta appunto $h_2 = 2\mu$. Cioè le (9) coincidono con le formule (2) del Somigliana.