ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1].

1. *Prima disuguaglianza fra i caratteri d'una varietà a tre dimensioni.* — Sia V una varietà algebrica irriducibile, a tre dimensioni, d'irregolarità bidimensionale $q > 0$, che possiamo supporre immersa in uno spazio a quattro dimensioni (x_1, x_2, x_3, z); e siano

$$u_i = \int P_i\, dx_1 + Q_i\, dx_2 + R_i\, dx_3, \quad (i = 1, 2, \dots, q), \tag{1}$$

q integrali semplici di 1ª specie, linearmente indipendenti, appartenenti a V.

Supposto che V non contenga un fascio irrazionale di superficie algebriche — e, quindi, che due integrali semplici, distinti, di 1ª specie, appartenenti a V, siano sempre funzionalmente indipendenti — proponiamoci di ricercare una disuguaglianza fra i caratteri di V, verificata la quale si possa asserire che *tre* fra gli integrali (semplici, distinti) di 1ª specie della V sono funzionalmente dipendenti. Dovremo perciò supporre $q \geq 3$; ma, come si vedrà in seguito, quest'ipotesi non implica alcuna restrizione.

Consideriamo adunque tre integrali semplici qualunque di 1ª specie, linearmente indipendenti, appartenenti a V, che saranno del tipo

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{q} \nu_i u_i, \quad (\lambda, \mu, \nu \text{ costanti}), \tag{2}$$

e osserviamo che la loro dipendenza funzionale è espressa dall'annullarsi del determinante

$$D = \begin{vmatrix} \Sigma\lambda_i P_i, & \Sigma\mu_i P_i, & \Sigma\nu_i P_i \\ \Sigma\lambda_i Q_i, & \Sigma\mu_i Q_i, & \Sigma\nu_i Q_i \\ \Sigma\lambda_i R_i, & \Sigma\mu_i R_i, & \Sigma\nu_i R_i \end{vmatrix} \ (^2), \tag{3}$$

il quale si sviluppa colla formola

$$D = \sum_{h,k,t} \begin{vmatrix} \lambda_h, & \lambda_k, & \lambda_t \\ \mu_h, & \mu_k, & \mu_t \\ \nu_h, & \nu_k, & \nu_t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_h, & P_k, & P_t \\ Q_h, & Q_k, & Q_t \\ R_h, & R_k, & R_t \end{vmatrix}, \tag{4}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1913.
[2] Omettiamo per semplicità gli indici $1, q$ delle sommatorie.

dove per h, k, t si devono porre le $\binom{q}{3}$ combinazioni a tre a tre dei numeri $1, 2, \dots, q$.

Per ricercare se fra i determinanti

$$\Delta_{hkt} = \begin{vmatrix} P_h, & P_k, & P_t \\ Q_h, & Q_k, & Q_t \\ R_h, & R_k, & R_t \end{vmatrix}$$

sussistono relazioni del tipo di quella che si ottiene ponendo identicamente nullo il secondo membro della (4), consideriamo i $\binom{q}{3}$ integrali tripli

$$(5) \qquad \int \Delta_{hkt}\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

che, a norma di un teorema di Severi [1], sono di 1ª specie su V ovvero si riducono a delle costanti. Se il genere geometrico P_g di V è minore di $\binom{q}{3}$, cioè se si ha

$$(6) \qquad P_g = \binom{q}{3} - \delta, \quad (\delta > 0),$$

si avranno certamente δ identità lineari distinte del tipo

$$(7) \qquad \sum_{h,k,t} \varrho^{(i)}_{hkt} \Delta_{hkt} \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \delta),$$

e insieme con esse sussisteranno tutte quelle che si ottengono combinandole linearmente, cioè le

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{\delta} \sigma_i \sum_{h,k,t} \varrho^{(i)}_{hkt} \Delta_{hkt} \equiv 0,$$

nelle quali le σ_i son costanti arbitrarie.

Ora la condizione necessaria e sufficiente affinchè qualcuna delle identità (8) sia del tipo di quelle che si ottengono ponendo identicamente nullo

[1] Severi, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica*, Annali di matematica (3), tom. XX, pp. 201-216. È da notarsi che in questa Memoria si considerano integrali del tipo $\int \Sigma \Delta_{hkt}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ la sommatoria essendo estesa alle sei permutazioni *simultanee* degli indici 1, 2, 3 e delle lettere h, k, t. Si ha però, evidentemente,

$$\int \Sigma \Delta_{hkt}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 6 \int \Delta_{hkt}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

il 2° membro della (4) — il che porta la dipendenza funzionale di tre integrali del tipo (2) — è che per i gruppi di costanti $\sigma_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$, esistano valori non tutti nulli, i quali verifichino le $\binom{q}{3}$ relazioni

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{\delta} \sigma_i \varrho_{hkt}^{(i)} = \begin{vmatrix} \lambda_h, & \lambda_k, & \lambda_t \\ \mu_h, & \mu_k, & \mu_t \\ \nu_h, & \nu_k, & \nu_t \end{vmatrix}.$$

Per vedere quando le (9) possano essere verificate, interpretiamo, seguendo Castelnuovo ([1]) le $\varrho_{hkt}^{(i)}$ come coordinate omogenee di δ punti $A_i (i = 1, 2, \dots, \delta)$ di una spazio a $\binom{q}{3} - 1$ dimensioni. Allora, al variare delle σ_i, il primo membro della (9) dà le coordinate di un punto che può occupare qualunque posizione entro lo $S_{\delta-1}$, individuato dai punti A_i. Il 2° membro invece fornisce le coordinate di un punto che si può associare al piano individuato, entro uno spazio S_{q-1}, dai punti di coordinate omogenee $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$, $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q)$, e che perciò, al variare delle λ_i, μ_i, ν_i, descrive una varietà W a $3(q-3)$ dimensioni. La (9) sarà dunque soddisfatta da convenienti valori, non tutti nulli, delle $\sigma_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$, se lo $S_{\delta-1}$ e la W avranno dei punti in comune; e questo certamente accadrà se

$$\delta - 1 + 3(q-3) \geq \binom{q}{3} - 1,$$

cioè, tenendo conto della (6), se sarà

$$(10) \qquad P_g \leq 3(q-3).$$

Viceversa, se è soddisfatta la (10), lo è pure la (6), e quindi qualcuno dei determinanti (3) risulterà identicamente nullo sopra V. Se inoltre, come abbiamo inizialmente supposto, la V non contiene fasci irrazionali, ciò significa che tre integrali del tipo (2) sono funzionalmente dipendenti senza che lo siano due fra essi; e perciò, applicando il teorema dimostrato nella Nota precedente ([2]), possiamo concludere che V possiede una congruenza irregolare, d'indice 1, di curve algebriche.

Rimane adunque provata l'esistenza d'un sistema siffatto, o quella d'un fascio irrazionale di superficie, sopra ogni varietà algebrica a tre dimensioni i cui caratteri verifichino la disuguaglianza (10).

([1]) Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XX (1905), pp. 55-60.

([2]) *Sulle varietà algebriche che possiedono integrali semplici funzionalmente dipendenti*. Questi Rendiconti, vol. XXII, ser 5ª, 2° sem. 1913, pag. 270.

Osservazione. — Poichè, essendo $P_g \geq 0$, la (10) non può essere soddisfatta se è $q < 3$, risulta in definitiva superfluo di enunciare l'ipotesi $q \geq 3$. È d'altronde noto che, per $q = 1, 2$, la V possiede una congruenza d'indice 1 e d'irregolarità q di curve algebriche, a un fascio di genere q di superficie algebriche [1]. Anzi, se $q = 1$, si può sempre considerare su V un fascio ellittico di superficie. Invero, se V possiede una congruenza Σ, d'indice 1, di curve algebriche, questa avrà l'irregolarità 1: e quindi una superficie F che sia imagine di Σ conterrà, come è noto, un fascio ellittico di curve, a cui risponderanno su V le superficie di un fascio parimenti ellittico. Del resto questa proprietà si può facilmente dedurre dal fatto che V possiede un solo integrale semplice di 1ª specie con due periodi.

2. Vediamo ora di precisare maggiormente il risultato del n. 1. Perciò supponiamo anzitutto che V contenga una congruenza Σ, d'indice 1, di curve algebriche, avente l'irregolarità d. Poichè mediante la trasformazione razionale che intercede tra V e una superficie F imagine di Σ, a d integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti, appartenenti ad F, corrispondono altrettanti integrali analoghi di V, ciascuno dei quali si mantiene costante lungo le curve di Σ, potremo supporre, scegliendo convenientemente gli integrali (1), che questa proprietà sia verificata da $u_1, u_2, \dots, u_d$. Supposto anche che due fra gli integrali (1), ad es. u_1, u_2, siano funzionalmente indipendenti, consideriamo i $q - d$ determinanti

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} P_1 , & Q_1 , & R_1 \\ P_2 , & Q_2 , & R_2 \\ P_i , & Q_i , & R_i \end{vmatrix} , \quad (i = d+1, d+2, \dots, q),$$

e osserviamo che essi non possono risultare identicamente nulli, perchè, altrimenti, qualcuno fra gli integrali u_i con $i > d$ dipenderebbe funzionalmente da u_1, u_2, e quindi sarebbe costante lungo le curve della congruenza: e che essi sono inoltre linearmente indipendenti, perchè una relazione lineare del tipo

$$\sum_{i=d+1}^{q} \lambda_i \begin{vmatrix} P_1 , & Q_1 , & R_1 \\ P_2 , & Q_2 , & R_2 \\ P_i , & Q_i , & R_i \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} P_1 , & Q_1 , & R_1 \\ P_2 , & Q_2 , & R_2 \\ \Sigma \lambda_i P_i , & \Sigma \lambda_i Q_i , & \Sigma \lambda_i R_i \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

non potendo, per l'indipendenza lineare di $u_{d+1}, u_{d+2}, \dots u_q$, essere equivalente alle

$$\sum_{h=d+1}^{q} \lambda_h P_h \equiv 0 , \quad \sum_{h=d+1}^{q} \lambda_h Q_h \equiv 0 , \quad \sum_{h=d+1}^{q} \lambda_h R_h \equiv 0 ,$$

[1] Severi, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, questi Rendiconti (5), tom. XX (1911), pp. 537-546.

porterebbe di conseguenza una relazione funzionale fra l' integrale

$$u = \sum_{h=d+1}^{q} \lambda_h u_h ,$$

e gli integrali u_1, u_2, che è assurda perchè u — il quale è linearmente indipendente da $u_1, u_2, \ldots, u_d$ — dovrebbe esser costante lungo le curve della congruenza, mentre a questa *appartengono* i soli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_d$ linearmente indipendenti.

Poichè si possono formare $q - d$ determinanti linearmente indipendenti del tipo (11), e quindi altrettanti integrali tripli distinti di 1ª specie appartenenti a V, così si conclude che

$$P_g \geq q - d \,, \quad \text{cioè} \quad d \geq q - P_g \,.$$

Questa disuguaglianza è espressiva solo se $q - P_g \geq 3$, perchè si ha sempre $d \geq 3$ in virtù del teorema dimostrato nella Nota precedente.

Supponiamo, ora, che, pure essendo soddisfatta la (10), V non si trovi nelle condizioni precedentemente esaminate; vi sarà allora entro V un fascio di superficie avente il genere $d (\geq 2)$, e ci sarà lecito di imaginare che gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_d$ di V si mantengano costanti lungo le superficie del fascio. Posto allora $u = \sum_{h=d+2}^{q} \lambda_h u_h$ (le λ essendo costanti), consideriamo i tre integrali u_1, u_{d+1}, u e osserviamo:

1°) che due fra essi non possono essere funzionalmente dipendenti. Invero, se lo fossero u_1, u_{d+1}, ovvero u_1, u, al fascio considerato apparterrebbero più di d integrali di 1ª specie linearmente indipendenti; e se lo fossero u_{d+1}, u, la V conterrebbe un altro fascio di superficie algebriche, ciascuna delle quali sarebbe di livello costante per quei due integrali. Ma allora la congruenza, d'indice 1, di curve algebriche, che risulta dall'intersezione dei due fasci, possiederebbe i due integrali di 1ª specie u_1, u_{d+1} funzionalmente indipendenti, e quindi si ricadrebbe nel caso precedente;

2°) che a quest'ultima conclusione porterebbe subito l'ipotesi di un legame funzionale fra u_1, u_{d+1}, u;

ne risulterà che i $q - d - 1$ determinanti

$$\begin{vmatrix} P_1 & , Q_1 & , R_1 \\ P_{d+1} & , Q_{d+1} & , R_{d+1} \\ P_h & , Q_h & , R_h \end{vmatrix} , \quad h = (d+2, d+3, \ldots, q) ,$$

sono diversi da zero e linearmente indipendenti, e quindi che $P_g \geq q - d - 1$, cioè, infine, che $d \geq q - P_g - 1$.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se fra il genere geometrico P_g *e l'irregolarità bidimensionale* q *di una varietà algebrica* V *a tre dimensioni intercede la disuguaglianza*

$$P_g \leq 3(q-3), \tag{I}$$

la varietà possiede una congruenza, d'indice 1, di curve algebriche, avente l'irregolarità ($\geq 3e$) *almeno eguale a* $q - P_g$, *o un fascio di superficie algebriche di genere* ($\geq 2e$) *almeno eguale a* $q - P_g - 1$.

Matematica. — *Sul teorema d'esistenza in un problema dei valori al contorno per le equazioni del tipo parabolico.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

1. Per le ricerche di Holmgren e di E. E. Levi [2] sull'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y), \tag{1}$$

si è venuti in possesso del seguente teorema relativo alla sua integrazione:

Sia s *un contorno aperto i cui estremi, sempre distinti, siano sopra una medesima caratteristica* [*per l'equazione* (1)] *e che con questa, rimanendole tutto al di sotto, limiti un campo connesso e finito; esiste allora* (*sotto certe condizioni pel contorno* s *e per le sue tangenti*) *in tutto il detto campo, ed è ivi unico, un integrale* z *della* (1) *che prende su* s *valori prescritti. Il problema di costruire l'integrale* z *dipende dalla risoluzione di un'equazione integrale del tipo Volterra.*

In seguito a questo risultato, si è spontaneamente condotti a porsi la questione se un identico teorema non valga per l'integrazione della più generale equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine del tipo parabolico

$$L(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f, \tag{2}$$

considerando che, nel caso delle equazioni iperboliche ed ellittiche, i teoremi stabiliti per le equazioni tipiche

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \lambda u = f,$$

si sono poi trovati validi per le più generali.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1913.

[2] Holmgren, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, tom. 3, 4 (1906-1908); E. E. Levi, Annali di Matematica, tom. XIV (1907); cfr. Volterra, *Leçons de Stockholm*, 10ième et 11ième; Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tom. III, chap. XXIX.