ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se fra il genere geometrico P_g *e l'irregolarità bidimensionale* q *di una varietà algebrica* V *a tre dimensioni intercede la disuguaglianza*

$$(I)\qquad P_g \leq 3(q-3),$$

la varietà possiede una congruenza, d'indice 1, di curve algebriche, avente l'irregolarità ($\geq 3e$) *almeno eguale a* $q - P_g$, *o un fascio di superficie algebriche di genere* ($\geq 2e$) *almeno eguale a* $q - P_g - 1$.

Matematica. — *Sul teorema d'esistenza in un problema dei valori al contorno per le equazioni del tipo parabolico.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

1. Per le ricerche di Holmgren e di E. E. Levi [2] sull'equazione del calore

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y),$$

si è venuti in possesso del seguente teorema relativo alla sua integrazione:

Sia s *un contorno aperto i cui estremi, sempre distinti, siano sopra una medesima caratteristica* [*per l'equazione* (1)] *e che con questa, rimanendole tutto al di sotto, limiti un campo connesso e finito; esiste allora (sotto certe condizioni pel contorno* s *e per le sue tangenti) in tutto il detto campo, ed è ivi unico, un integrale* z *della* (1) *che prende su* s *valori prescritti. Il problema di costruire l'integrale* z *dipende dalla risoluzione di un'equazione integrale del tipo Volterra.*

In seguito a questo risultato, si è spontaneamente condotti a porsi la questione se un identico teorema non valga per l'integrazione della più generale equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine del tipo parabolico

$$(2)\qquad L(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f,$$

considerando che, nel caso delle equazioni iperboliche ed ellittiche, i teoremi stabiliti per le equazioni tipiche

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \lambda u = f,$$

si sono poi trovati validi per le più generali.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1913.

[2] Holmgren, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, tom. 3, 4 (1906-1908); E. E. Levi, Annali di Matematica, tom. XIV (1907); cfr. Volterra, *Leçons de Stockholm*, 10ième et 11ième; Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tom. III, chap. XXIX.

La questione indicata è stata effettivamente oggetto di studio. Da me e, quasi contemporaneamente, dal Gevrey e dall' Hadamard ed infine, più recentemente, dall' Holmgren [1]. Ma in tutti questi studî del problema Holmgren-Levi per l'equazione (2), sia che si tenti di stabilire il teorema di unicità (Picone, Gevrey. Holmgren), sia che si tenti di stabilire il teorema d'esistenza (Gevrey), sia che si tenti la ricerca di una soluzione fondamentale (Hadamard), si è stati sempre costretti a considerare la (2) in un campo in cui il coefficiente $b(x, y)$ si mantenga diverso da zero o soddisfi, cogli altri coefficienti, a certe relazioni speciali.

Sono, queste, delle restrizioni dipendenti dai metodi seguìti nella ricerca? Mostrerò in questa Nota che ciò non è; mostrerò che il teorema Holmgren-Levi più non è valido per l'equazione (2) *quando si lasci al coefficiente* $b(x, y)$ ***tutta*** *la sua generalità.*

Quivi infatti adduco esempî di equazioni (2) per le quali l'integrale verificante le condizioni del problema Holmgren-Levi non sempre esiste, per quanto, quando esiste, sia sempre da queste ben determinato. Si scorge in ciò altresì l'impossibilità di tradurre il problema Holmgren-Levi per l'equazione (2) in un'equazione integrale del tipo Volterra o del tipo Fredholm, quando si lasci al coefficiente $b(x, y)$ tutta la sua generalità: diversamente, i teoremi di unicità e di esistenza per quel problema dovrebbero sempre valere o, quando mancano, mancare insieme.

Non sembra dunque che ad una teoria per la determinazione dell'integrale delle equazioni paraboliche più generali si possa dare (*nel campo non analitico*) uno svolgimento che, nelle sue fasi, presenti qualche analogia con quello preso dalla teoria per la determinazione dell'integrale delle equazioni iperboliche o delle equazioni ellittiche.

2. Stabiliamo anzitutto il teorema di unicità nel problema Holmgren-Levi per l'equazione (2) [2]. Nel campo Γ, in cui sono definiti i coefficienti dell'equazione

$$\text{(3)} \qquad L(u) = 0\,,$$

e sono finiti e continui con le derivate $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$, consideriamo una curva s senza punti multipli, tntta al finito, la quale ammetta tangente (generalmente) e sia incontrata in un numero finito di punti dalle parallele all'asse delle x e dalle parallele all'asse delle y.

[1] Picone, *Sopra alcuni problemi nella teoria delle equazioni paraboliche*, Litografia (Pisa), marzo 1911; Gevrey, Compt. rendus, 1° sem. 1911, tom. 152, pag. 428; Hadamard, ibidem, pag. 1148; Holmgren, Arkiv för Mat., tom. 7 (1912).

[2] La dimostrazione che ne dò qui, trovasi già nella mia Memoria citata. Ad essa rimane sempre il pregio, in confronto delle altre, di una grandissima elementarità.

Vogliamo dimostrare il seguente teorema di unicità:

La curva s sia terminata da due punti $A(x_0, k)$, $B(x_1, k)$, *eventualmente coincidenti* $(x_0 \leq x_1)$, *sulla caratteristica* $y = k$, *e col segmento* AB *di questa limiti un campo* C *di* $\boldsymbol{\Gamma}$. *Se è, in tutto* C,

$$b(x, y) < 0 \, [b(x, y) > 0]$$

e la normale al segmento AB, *vòlta verso l'interno del campo* C, *ha senso contrario (concorde) a quello dell'asse delle y, non può esistere in* C *più di un integrale delle* (2) *che su s prenda valori prescritti.*

Dimostreremo che un integrale u della (3), nullo su tutto s, è identicamente nullo in C, e lo faremo nell'ipotesi secondo cui, essendo, in C, $b(x, y) < 0$, la normale al segmento AB vòlta verso l'interno di C ha senso contrario a quello dell'asse delle y. Perciò, ispirandoci ad un artificio escogitato dal Dini [1], moltiplichiamo ambo i membri della (3) per un'arbitraria funzione $p(y)$ della sola y, *sempre positiva in tutto* $\boldsymbol{\Gamma}$, di cui fra poco disporremo. Dalla (3) segue:

$$\text{(4)} \qquad \iint p\, u\, \mathrm{L}(u)\, dx\, dy = 0\,,$$

intendendo, come sempre in seguito, l'integrale doppio esteso al campo C. Ora si ha, poichè su s è nulla u, e su AB è nullo dy,

$$\iint pu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\, dy = \iint u \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy = - \iint p \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy\,,$$

$$\iint pua \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy = \iint \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x}(pu^2)\, dx\, dy = - \iint \frac{p}{2} \frac{\partial a}{\partial x} u^2\, dx\, dy\,,$$

$$\iint pub \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy = \iint \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial y}(pu^2)\, dx\, dy - \iint \frac{b}{2} p' u^2\, dx\, dy =$$

$$= - \iint \left(p \frac{\partial b}{\partial y} + p'b\right) \frac{u^2}{2}\, dx\, dy + \frac{p(k)}{2} \int_{x_0}^{x_1} b(x, k)\, u^2(x, k)\, dx\,;$$

pertanto seguirà dalla (4):

$$\text{(5)} \quad - \iint p \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy + \frac{1}{2} \iint \left\{ p \left(2c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) - p'b \right\} u^2\, dx\, dy + $$
$$+ \frac{p(k)}{2} \int_{x_0}^{x_1} b(x, k)\, u^2(x, k)\, dx = 0\,.$$

[1] Dini, *Sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, vol. III della serie 5ª (1899), nn. 2 e 3. In questa Memoria del Dini trovasi, a pag. 72, enunciato un teorema di unicità per le equazioni paraboliche da cui si può dedurre, come caso particolare, il teorema che dimostriamo nel testo; il quale dunque, sostanzialmente, è da considerarsi come dovuto al Dini.

Ora avendosi sempre, in C, $p > 0$ e $b < 0$, il primo membro di quest'ultima eguaglianza sarebbe la somma di tre integrali dello stesso segno se in C fosse

$$p\left(2c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{db}{dy}\right) - p'b \leq 0. \tag{6}$$

Ciò si potrà ottenere disponendo della funzione arbitraria positiva $p(y)$. E infatti, per l'ipotesi fatta su $b(x, y)$, secondo la quale essa non è mai nulla in C, la funzione

$$\frac{1}{b}\left(2c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) \tag{7}$$

sarà ivi finita; detto m il suo minimo, sarà verificata la (6) da tutte quelle funzioni positive $p(y)$ per le quali è $p' : p \leq m$, in particolare dalla e^{my}. Scelta in tal modo la funzione $p(y)$, dalla (5) si trarrà necessariamente $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, e quindi, ivi, $u \equiv 0$. Il nostro teorema di unicità è dunque dimostrato.

3. Le condizioni sotto le quali abbiamo ottenuto il precedente teorema di unicità, mentre prestano un ufficio importantissimo (Gevrey) nella dimostrazione del teorema d'esistenza per il problema Holmgren-Levi, non sono, com'è evidente, tutte essenziali per il detto teorema di unicità. Così, per concludere l'unicità in C dell'integrale della (2) che prende su s valori assegnati, basterebbe, per esempio, supporre che sia $b \leq 0$ soltanto sul segmento AB della caratteristica $y = k$, e che, pur potendo altrove b passare dal positivo al negativo, sia sempre in C

$$2c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leq 0.$$

Prendendo allora per $p(y)$ una costante positiva, il primo membro della (5) risulterebbe di nuovo una somma di integrali dello stesso segno.

Come pure il precedente teorema di unicità continuerebbe a valere nel caso in cui sul segmento AB della caratteristica $y = k$ fosse sempre $b \leq 0$ e in C la funzione (7) risultasse finita, pur potendo b annullarvisi.

4. Fermiamoci a considerare quest'ultimo caso. Vogliamo mostrare che, assegnato il campo C, si possono scegliere, con una grandissima arbitrarietà, i coefficienti di $L(u)$ in guisa che, essendo $b \leq 0$ su AB e la (7) finita in C (continuando dunque a valere il teorema di unicità per il problema Holmgren-Levi), non sempre rimane valido il relativo teorema d'esistenza.

Consideriamo pure un campo C il cui contorno sia nelle condizioni più particolari sotto le quali è stato dimostrato (Gevrey) l'indicato teorema di esistenza nel caso $b < 0$. Il contorno di C deve essere costituito da due segmenti AB e CD rispettivamente delle caratteristiche $y=h$, $y=k$ $(h<k)$ e da due curve c_1 e c_2, essendo la prima, terminata in A e in C, tutta alla sinistra della seconda, terminata in B e in D, e per le quali si suppone: 1°) che ogni caratteristica $y=l$ $(h \leq l \leq k)$ le incontri rispettivamente in un sol punto; 2°) che ammettono ciascuna tangente (generalmente), che non diviene mai orizzontale, salvo nei punti C e D in cui ciò può accadere; 3°) che i punti A e B sono distinti. Il contorno s del campo C risulta dunque costituito dalle curve c_1 e c_2 e dal segmento CD della caratteristica $y=h$.

Vogliamo definire i coefficienti di $L(u)$ in un campo rettangolare R, limitato dalle rette $x=x_0$, $x=x_1$, $y=y_0$, $y=y_1$, contenente nel suo interno il campo C, e ciò in modo che, pur continuando a valere in C il teorema di unicità relativo all'integrale della (2) che prende su s valori assegnati, i valori che ogni integrale della stessa (2) prende nei punti E ed F di s sulla caratteristica $y=l$ $(h \leq l \leq k)$ sono legati da una relazione.

Diciamo ξ_0 e ξ_1 $(\xi_0 < \xi_1)$ rispettivamente le ascisse di E e di F. Siano $\alpha(x)$ e $\gamma(x)$ due arbitrarie funzioni della x definite in (x_0, x_1), ivi finite e continue, delle quali la seconda non sia identicamente nulla in (ξ_0, ξ_1); e consideriamo l'equazione differenziale lineare ordinaria del 2° ordine

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dv}{dx} + \lambda\gamma(x)\, v = f(x, l), \tag{8}$$

contenente il parametro λ. Esistono valori λ_i del parametro, a ciascuno dei quali corrisponde una relazione lineare

$$p_{i1} v_1 + p_{i2} v_2 + p_i = 0, \tag{9}$$

la quale lega i valori v_1 e v_2 che ogni integrale della (8) (fattovi $\lambda = \lambda_i$) prende in ξ_0 e in ξ_1.

Diamo a λ uno λ_i di questi valori. Indi definiamo in R due funzioni $a(x, y)$ e $\lambda_i c(x, y)$, ivi finite e continue con $\dfrac{\partial a}{\partial x}$, che si riducano rispettivamente alle funzioni $\alpha(x)$ e $\lambda_i\gamma(x)$ per $y=l$. Sarà assicurato il nostro teorema di unicità per l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda_i cz = f(x, y), \tag{10}$$

se sceglieremo poi b in guisa che, essendo $b(x, k) \leq 0$, risulti la funzione

$$\frac{1}{b}\left(2\lambda_i c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) \tag{7'}$$

finita e continua in R. Perchè si verifichi quest'ultima circostanza, basta evidentemente dedurre b dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu b) = \mu\left(2\lambda_i\, c - \frac{\partial a}{\partial x}\right),$$

dove μ designa un'arbitraria funzione, sempre positiva in R. Poniamo

(11) $$b = \frac{1}{\mu}\int_l^y \mu\left(2\lambda_i\, c - \frac{\partial a}{\partial x}\right) d\eta\,;$$

con questo valore di b, ogni soluzione della (10) soddisfa, per $y = l$, alla equazione (8), ai cui coefficienti si riducono quelli della (10).

Occorre ancora ulteriormente disporre di c e di a in guisa che per la funzione b definita dalla (11) si abbia $b(x\,,k) \leq 0$. A tale scopo, lasciando a affatto arbitraria fra le funzioni che si riducono ad $\alpha(x)$ per $y = l$, scegliamo la funzione $c(x\,,y)$, fra quelle che si riducono a $\gamma(x)$ per $y = l$, in guisa che risulti

(12) $$\int_l^k \mu\left(2\lambda_i\, c - \frac{\partial a}{\partial x}\right) d\eta \leq 0\,,$$

ciò che si potrà conseguire ancora con una grandissima arbitrarietà. Detta infatti $p(x\,,y)$ un'arbitraria funzione definita in R, identicamente nulla per $y = l$ e sempre positiva per $y > l$, poniamo

$$c(x\,,y) = \gamma(x) + \mathrm{M}\, p(x\,,y)\,,$$

dove M designa una costante. La disuguaglianza (12) si traduce nella seguente:

$$2\lambda_i \mathrm{M}\int_l^k \mu p\, d\eta + \int_l^k \mu\left(2\lambda_i\,\gamma - \frac{\partial a}{\partial x}\right) d\eta \leq 0\,,$$

alla quale, poichè $\int_l^k \mu p\, d\eta > 0$, si potrà soddisfare dando ad M un valore assoluto convenientemente grande e segno contrario a quello di λ_i.

Scelti nel modo ora detto i coefficienti della (10), *questi soddisfano alle condizioni sotto le quali è assicurata, quando esiste, l'unicità in* C *dell'integrale che su s prende valori prescritti, non ostante che tali valori non possano assegnarsi arbitrariamente: quelli nei punti* E *ed* F *di s devono soddisfare alla relazione lineare* (9) [1].

[1] Per un'equazione del tipo (2), la natura delle caratteristiche (*doppie*) si riconnette (E. E. Levi, *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy*, Annali di Matematica, tomo XVI della serie 3ª) alle proprietà del coefficiente $b(x\,,y)$. Se nel campo C esistono caratteristiche sulle quali $b = 0$ e caratteristiche sulle quali $b \gtreqless 0$, l'equazione ha in C caratteristiche di due diversi tipi. L'analisi svolta nel testo pone in luce la singolare influenza di questo fatto sopra il problema dei valori al contorno ivi considerato.

5. Di esempî come il precedente è facile, imitando il procedimento ora esposto, trovarne moltissimi altri, specialmente quando si supponga che la parte s del contorno del campo C sia chiusa, non avendo allora più da soddisfare alla condizione $b(x, k) \leq 0$.

Tralasciando quest'ordine di considerazioni, ritorniamo al teorema di unicità, per il campo C considerato al num. precedente, relativo agli integrali della (2) che prendono, su s, valori prescritti.

Si può stabilire un teorema di confronto dell'equazione (3) con la equazione autoaggiunta

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathrm{A}v = 0, \tag{13}$$

identico a quello da me dato nella Nota apparsa nell'ultimo fascicolo di questi Rendiconti, togliendo, nel caso $b(x, k) \leq 0$, la condizione per l'integrale u di annullarsi anche sul segmento di caratteristica AB facente parte del contorno di C. Si ha, in particolare, il teorema:

Se è $b(x, k) \leq 0$, $\mathrm{A} \geq c - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)$ *in tutto* C, *ed ivi esiste un integrale della* (13) *sempre diverso da zero, un integrale della* (3) *nullo su* s *è identicamente nullo in* C. Ne segue:

Se è $b(x, k) \leq 0$, *e indichiamo con* M *il massimo in* Γ *di*

$$c - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)$$

o un numero maggiore di questo, in qualunque campo C, *per il quale le curve laterali* c_1 *e* c_2 *del contorno staccano sopra ogni caratteristica un segmento minore di* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}$, *è unico l'integrale della* (2) *che su* s *prende valori prescritti.*

La condizione $b(x, k) \leq 0$ può essere soppressa quando la parte s del contorno di C è chiusa; ed allora il semplicissimo teorema precedente costituisce, a mio credere, l'unica proposizione che si sia fino ad ora formulata (*nel campo non analitico*) per l'integrale della più generale equazione lineare alle derivate parziali del 2° ordine, del tipo parabolico, indipendentemente dalla conoscenza di integrali particolari dell'equazione data o di quella aggiunta (cfr. la citata mia Nota).

Questa proposizione, nel caso particolare che per M si possa assumere un infinitesimo positivo, nel caso cioè che sia, in Γ,

$$c - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) \leq 0,$$

si deduce subito dalla (5), col farvi $p' \equiv 0$, $x_0 = x_1$; e, del resto, fu già notata dal Dini nella Memoria citata (pag. 63).