ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Fisica matematica. — *Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica.* Nota I del Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

Nello studio delle trasformazioni di Lorentz e delle equazioni della elettrodinamica, è di notevole importanza la ricerca delle leggi con cui si trasformano alcuni enti fisici; per esempio, la forza e la eccitazione elettrica e magnetica, la forza elettromagnetica di Lorentz, la forza elettrica e magnetica di riposo di Minkowski [2].

Alla risoluzione di queste e di altre questioni, coi metodi delle omografie vettoriali [3], è dedicato il lavoro che ho l'onore di presentare alla Accademia. Dopo aver riassunto e completato le formule relative alle trasformazioni di Lorentz [4], espongo in questa prima Nota le proprietà di alcune omografie, funzioni di un punto e del tempo, la cui considerazione è assai utile e suscettibile di molte applicazioni. Esporrò quindi in una Nota successiva la parte che è oggetto principale del lavoro.

§ 1.

Ad un punto P e ad un qualunque valore t del tempo (in un sistema S) corrispondono, in un sistema S', un punto P' ed un valore t' tali che

$$(1)\qquad P' - O = \alpha(P - O) + t\mathbf{a} \quad , \quad t' = (P - O) \times \mathbf{b} + tm$$

$$(2)\qquad (P' - O)^2 - t'^2 = (P - O)^2 - t^2 ;$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1913.

(2) H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern* [Nachricht. der K. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse, 1908, 53-111].

(3) Come è noto, Minkowski nelle sue ricerche si è valso della teoria delle matrici. L'applicazione dei quaternioni alla stessa teoria ha formato oggetto dei lavori del sig. A. W. Conway, *On the application of Quaternions to some recent developments of electrical theory* [Proceedings of the R. Irish Academy, vol. 29, Sect. A, n. 1 (1911)] e, recentemente, del sig. E. Waelsch, *Quaternionen und binären Formen zu den Minkowski'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik* [Sitzungsber. der K. Akademie der Wiss. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. 122; März und Juni 1913].

(4) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*: I. *Transformations linéaires* (Pavie, Mattei, 1912); II. *Applications à la mécanique et à la physique* (Pavie, Mattei, 1913). Vedasi specialmente a pag. 107 e la bibliografia a pag. 118 di questo secondo volume. Citeremo con numeri romani i due volumi della *Analyse*.

O è un punto fisso; α una omografia vettoriale propria e il cui invariante terzo supporremo positivo; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ due vettori; m un numero positivo maggiore di uno [1].

Queste formule definiscono una trasformazione di Lorentz, che indicheremo brevemente con L (II, pag. 107). Le formule inverse, pel passaggio da S' ad S, si deducono subito dalle precedenti, e sono:

$$(1') \qquad P - O = \mathrm{K}\alpha\,(P' - O) - t'\mathbf{b} \quad , \quad t = -(P' - O)\times\mathbf{a} + t'm\,.$$

Le equazioni dell'elettrodinamica di Lorentz si trasformano in se stesse, quando si operi una trasformazione L (teorema di relatività); e le relazioni che legano gli elementi trasformati (densità elettrica ϱ, velocità $\mathbf{v}$ degli elettroni, forza elettrica e magnetica $\mathbf{e}$, $\mathbf{m}$) ai primitivi, nel passaggio dal sistema S ad S', sono le seguenti (II, pag. 113):

$$(3) \qquad \varrho' = \varrho\,(m + \mathbf{v}\times\mathbf{b})$$
$$(4) \qquad \varrho'\mathbf{v}' = \varrho\,(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a})$$
$$(5) \qquad \mathbf{m}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + \mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{e}$$
$$(6) \qquad \mathbf{e}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} - \mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{m}\,.$$

Da queste si dedurranno le formule inverse pel passaggio da S' ad S (mutando α, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ rispettivamente in $\mathrm{K}\alpha$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}$), e cioè

$$(3') \qquad \varrho = \varrho'(m - \mathbf{v}'\times\mathbf{a})$$
$$(4') \qquad \varrho\mathbf{v} = \varrho'(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b})$$
$$(5') \qquad \mathbf{m} = \mathrm{R}\mathrm{K}\alpha\mathbf{m}' - \mathbf{b}\wedge\mathrm{K}\alpha\mathbf{e}'$$
$$(6') \qquad \mathbf{e} = \mathrm{R}\mathrm{K}\alpha\mathbf{e}' + \mathbf{b}\wedge\mathrm{K}\alpha\mathbf{m}'.$$

Infatti, le (3') e (4') si scrivono subito confrontando le (3) e (4) colle (1), sostituendo cioè $\varrho\mathbf{v}$, $\varrho'\mathbf{v}'$ a $P - O$, $P' - O$; ϱ e ϱ' a t e t' rispettivamente, e tenendo presenti le (1'). Rammentando poscia la formula (II, pag. 113, [10])

$$\alpha\mathbf{m} = m\mathbf{m}' - \mathbf{a}\wedge\mathbf{e}'\,,$$

si operi sui due membri con $\mathrm{R}\mathrm{K}\alpha$; tenendo presenti le formule (I, pag. 38, [4] II, pag. 107, [8], [3])

$$(7) \qquad \mathrm{R}\alpha.\mathrm{K}\alpha = \mathrm{R}\mathrm{K}\alpha.\alpha = \mathrm{I}_3\alpha = m \quad , \quad \alpha\mathbf{b} = m\mathbf{a} \quad , \quad \mathrm{K}\alpha\mathbf{a} = m\mathbf{b}\,,$$

si deduce subito la (5'). E del pari si opera per la (6').

[1] Anche il sig. E. Hahn, nella Memoria: *Grundlagen zu einer Theorie der Lorentztransformationen* [Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, 21 B., 1-42 (1913)], si è in parte valso di questa rappresentazione, e poi esclusivamente della teoria delle matrici quaternarie.

Per maggiore chiarezza di quanto dovremo dire in seguito, conviene notare e ricordare le seguenti proprietà delle trasformazioni L, esprimenti, in forma assoluta, note proprietà dei determinanti ortogonali:

$$(8)\qquad \mathrm{R}\alpha\mathbf{b} = \mathbf{a} \qquad , \qquad \mathrm{RK}\alpha\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

$$(9)\qquad \mathrm{R}\alpha = m\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{b}\,,\mathbf{a}) \qquad , \qquad \mathrm{RK}\alpha = m\mathrm{K}\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{a}\,,\mathbf{b})$$

$$(10)\qquad \alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha = 1 + \mathrm{H}(\mathbf{a}\,,\mathbf{a}) \qquad , \qquad \mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha = 1 + \mathrm{H}(\mathbf{b}\,,\mathbf{b})$$

$$(11)\qquad \mathrm{R}\alpha\,.\,\mathrm{RK}\alpha = m^2 - \mathrm{H}(\mathbf{a}\,,\mathbf{a}) \qquad , \qquad \mathrm{RK}\alpha\,.\,\mathrm{R}\alpha = m^2 - \mathrm{H}(\mathbf{b}\,,\mathbf{b})$$

$$(12)\qquad \mathrm{K}\alpha^{-1}\,.\,\alpha^{-1} = 1 - \frac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{a}\,,\mathbf{a}) \quad , \quad \alpha^{-1}\,.\,\mathrm{K}\alpha^{-1} = 1 - \frac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{b}\,,\mathbf{b}).$$

Infatti, operando con $\mathrm{R}\alpha$ sulla terza, e con $\mathrm{RK}\alpha$ sulla seconda delle (7), si deducono le (8).

Possiamo operare in modo identico sulle (10) già note (II, pag. 107, [3], [4]), ed otterremo

$$\mathrm{R}\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha = \mathrm{R}\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{b}\,,\mathrm{R}\alpha\mathbf{b})$$

la quale, per le (8), dimostra la prima delle (9).

Tornando ad operare sulle (9) con $\mathrm{RK}\alpha$ ed $\mathrm{R}\alpha$, oppure operando direttamente con R sulle (10) si proveranno le formule (11); e da queste, per le (I, pag. 38, [4']), si ricaveranno le (12).

Si osserverà che col sussidio delle (9) è possibile far figurare la sola omografia α e la sua coniugata $\mathrm{K}\alpha$ nei secondi membri di (5), (6), (5'), (6'); ma non faremo uso di tali formule più complicate delle (5) ..... (6').

Dai risultati precedenti si deducono queste altre conseguenze:

$$(13)\qquad \varrho'\,.\,\mathrm{RK}\alpha\mathbf{v}' = \varrho\,(m\mathbf{v} + \mathbf{b})$$

$$(13')\qquad \varrho\,.\,\mathrm{R}\alpha\mathbf{v} \;\;= \varrho'(m\mathbf{v}' - \mathbf{a})$$

$$(14)\qquad \mathrm{RK}\alpha\mathbf{m}' = m^2\mathbf{m} - \mathbf{b}\times\mathbf{m}\,.\,\mathbf{b} + m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e}$$

$$(15)\qquad \mathrm{RK}\alpha\mathbf{e}' = m^2\mathbf{e} - \mathbf{b}\times\mathbf{e}\,.\,\mathbf{b} - m\mathbf{b}\wedge\mathbf{m}$$

$$(14')\qquad \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} = m^2\mathbf{m}' - \mathbf{a}\times\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{a} - m\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}'$$

$$(15')\qquad \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} = m^2\mathbf{e}' - \mathbf{a}\times\mathbf{e}'\,.\,\mathbf{a} + m\mathbf{a}\wedge\mathbf{m}'\,.$$

Per dimostrare le (13) applichiamo l'operatore $\mathrm{RK}\alpha$ alla (4) e l'operatore $\mathrm{R}\alpha$ alla (4'), e rammentiamo le (8).

Parimenti da (5), operando con $\mathrm{RK}\alpha$, otterremo anzitutto:

$$\mathrm{RK}\alpha\mathbf{m}' = \mathrm{RK}\alpha\,.\,\mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + (\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})\wedge\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{e}\,;$$

poscia, dalla seconda delle (11),

$$\mathrm{RK}\alpha\,.\,\mathrm{R}\alpha\mathbf{m} = m^2\mathbf{m} - \mathbf{b}\times\mathbf{m}\,.\,\mathbf{b}\,,$$

e, per l'ultima delle (7) e la seconda delle (10),

$$(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})\wedge\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{e} = m\mathbf{b}\wedge(\mathbf{e} + \mathbf{e}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{b}) = m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e}\,;$$

risulterà quindi dimostrata la (14). Analogamente si procede per le altre.

Relazioni e conseguenze del tutto analoghe alle precedenti valgono nella elettrodinamica di Minkowski. Così, accennando ora con $\mathbf{E}$, $\mathbf{e}$ la forza e la eccitazione elettrica, con $\mathbf{m}$, $\mathbf{M}$ la forza e la eccitazione magnetica, con $\mathbf{s}$ il vettore corrente e con ϱ la densità elettrica nel sistema S, mentre pel sistema S' si adopreranno le stesse lettere accentate, si deduce che: $\mathbf{M}'$, $\mathbf{E}'$ si esprimono mediante $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$; $\mathbf{m}'$, $\mathbf{e}'$ si esprimono mediante $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}$, oppure inversamente, con formule identiche alle (5), (6) oppure alle (5′), (6′). Varranno ancora formule analoghe alle (14) ... (15′). Inoltre si ha:

$$\varrho' = \mathbf{s}\times\mathbf{b} + \varrho m \tag{16}$$

$$\mathbf{s}' = \alpha\mathbf{s} \quad + \varrho\mathbf{a}\,, \tag{17}$$

e quindi, col confronto colle (1), si dedurrà subito

$$\varrho = -\,\mathbf{s}'\times\mathbf{a} + \varrho' m$$

$$\mathbf{s} = \mathrm{K}\alpha\mathbf{s}' \quad - \varrho'\mathbf{b}\,,$$

e quindi anche l'invariante

$$\mathbf{s}'^2 - \varrho'^2 = \mathbf{s}^2 - \varrho^2\,.$$

Le formule accennate permettono di verificare, senz'altro, che sono parimenti invarianti, rispetto ad L,

$$\mathbf{m}\times\mathbf{e}\;,\;\mathbf{M}\times\mathbf{E}\quad,\;\tfrac{1}{2}(\mathbf{m}\times\mathbf{M} - \mathbf{e}\times\mathbf{E}) = \mathfrak{L}\,;$$

$\mathfrak{L}$ è la funzione di Lagrange (¹).

§ 2.

Diciamo ancora $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ i vettori velocità di due punti materiali P, P negli istanti t, t', dei due sistemi S, S'; poniamo, cioè,

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt}\quad,\quad \mathbf{v}' = \frac{dP'}{dt'}\,.$$

Dalle (1) e (1′) del § precedente, con una derivazione, dedurremo:

$$\mathbf{v}' = \frac{\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a}}{m + \mathbf{v}\times\mathbf{b}}\quad,\quad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b}}{m - \mathbf{v}'\times\mathbf{a}}\,. \tag{1}$$

Consideriamo i due numeri n, n' funzioni di P e di t, e, quindi, di P' e di t', definiti da

$$n = m + \mathbf{v}\times\mathbf{b}\quad,\quad n' = m - \mathbf{v}'\times\mathbf{a}\,. \tag{2}$$

(¹) Con metodi ben noti sarebbe assai facile passare dalle formule precedenti alle formule in coordinate cartesiane. Ma per avere una idea della grave complicazione che in tal modo si avrebbe, si può consultare: M. B. Weinstein, *Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie*, Leipzig, Barth, 1913; pp. 288 e seg.; 390 e seg.

Avremo, quindi,

(3) $$n\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v} + \mathbf{a} \quad , \quad n'\mathbf{v} = \mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b}$$

(4) $$nn' = 1 .$$

Infatti, dalla prima delle (3) e delle (2), per la (10) del § precedente, si deduce

$$n(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b}) = \mathrm{K}\alpha . \alpha\mathbf{v} + \mathrm{K}\alpha\mathbf{a} - m\mathbf{b} - \mathbf{v}\times\mathbf{b} . \mathbf{b} = \mathbf{v} ;$$

e poichè il primo membro vale $nn'\mathbf{v}$, resta verificata la (4).

Dalle (3) si ricava pure

(5) $$n . \mathrm{RK}\alpha\mathbf{v}' = m\mathbf{v} + \mathbf{b} \quad , \quad n' . \mathrm{R}\alpha\mathbf{v} = m\mathbf{v}' - \mathbf{a} ;$$

e dal confronto delle (2), (3) colle (1), deduciamo

(6) $$n^2(1 - \mathbf{v}'^2) = 1 - \mathbf{v}^2 .$$

Definiamo ora due nuove omografie γ , γ'

(7) $$\gamma = \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{v} , \mathbf{a}) \quad , \quad \gamma' = \mathrm{K}\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{b}) .$$

A differenza dell'omografia costante α, esse sono funzioni di P e di t, e, quindi, di P' e di t'; e risultano dalla somma di una omografia propria e di una diade, e, quindi, di una forma molto frequente in elettrodinamica.

Noi anzitutto proveremo che

(8) $$\gamma\gamma' = \gamma'\gamma = 1 .$$

Per un teorema noto (I, pag. 46), basterà provare una delle due. Ora, per proprietà note (I, pag. 43, [2]), si ha

$$\begin{aligned}\gamma\gamma' &= \alpha . \mathrm{K}\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{v} , \mathbf{a})\, \mathrm{K}\alpha - \alpha . \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{b}) - \mathrm{H}(\mathbf{v} , \mathbf{a}) . \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{b}) \\ &= 1 + \mathrm{H}(\mathbf{a} , \mathbf{a}) + \mathrm{H}(\alpha\mathbf{v} , \mathbf{a}) - \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \alpha\mathbf{b}) - \mathbf{v}\times\mathbf{b} . \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{a}) .\end{aligned}$$

Ma dalle (3) e poi dalla seconda delle (7) del § 1 si ha, successivamente

$$\mathrm{H}(\alpha\mathbf{v} , \mathbf{a}) = n\mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{a}) - \mathrm{H}(\mathbf{a} , \mathbf{a})$$

$$\mathrm{H}(\mathbf{v}' , \alpha\mathbf{b}) + \mathbf{v}\times\mathbf{b} . \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{a}) = (m + \mathbf{v}\times\mathbf{b})\, \mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{a}) = n\mathrm{H}(\mathbf{v}' , \mathbf{a}) ;$$

quindi, con la sostituzione diretta, risulterà provata la prima delle (8).

Risulta pure, per lo stesso teorema precedentemente ricordato, che γ e γ' sono omografie proprie.

Altre proprietà di queste omografie, che dovremo spesso applicare, sono le seguenti:

(9) $$\mathrm{K}\gamma = \mathrm{K}\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{a} , \mathbf{v}) \quad , \quad \mathrm{K}\gamma' = \alpha - \mathrm{H}(\mathbf{b} , \mathbf{v}')$$

(10) $$\mathrm{I}_3\gamma = n \quad , \quad \mathrm{I}_3\gamma' = n'$$

(11) $$\mathrm{R}\gamma = n\mathrm{K}\gamma' \quad , \quad \mathrm{R}\gamma' = n'\mathrm{K}\gamma$$

(12) $$\mathrm{KR}\gamma = n\gamma' \quad , \quad \mathrm{KR}\gamma' = n'\gamma$$

(13) $$\gamma\mathbf{b} = n\mathbf{a} \quad , \quad \gamma'\mathbf{a} = n'\mathbf{b}$$

(14) $$\mathrm{K}\alpha . \gamma\mathbf{b} = mn\mathbf{b} \quad , \quad \alpha . \gamma'\mathbf{a} = mn'\mathbf{a}$$

(15) $$\mathrm{KR}\alpha . \gamma\mathbf{b} = n\mathbf{b} \quad , \quad \mathrm{R}\alpha . \gamma'\mathbf{a} = n'\mathbf{a} .$$

In tutte queste formule, a γ', $K\gamma'$, ... n' possiamo rispettivamente sostituire γ^{-1}, $K\gamma^{-1}$, ... n^{-1}; basta inoltre dimostrare solamente le formule a sinistra: le altre risultano subito.

Ora la (9) è una immediata conseguenza della (7) (I, pag. 28, [3]).

Per dimostrare la (10) basta osservare che (II, pag. 136, [11])

$$I_3\gamma = I_3\alpha + \mathbf{v}\times RK\alpha\mathbf{a} = m + \mathbf{v}\times\mathbf{b} = n\,.$$

Poscia notiamo che (I, pag. 38, [4])

$$K\gamma\,.\,R\gamma = I_3\gamma = I_3\gamma\,.\,K\gamma\,.\,K\gamma',$$

poichè dalla (8) si ha

$$K\gamma\,.\,K\gamma' = 1\,;$$

quindi

$$K\gamma(R\gamma - nK\gamma') = 0\,.$$

Ma γ, e quindi $K\gamma$, sono proprie, così risulta subito la (11).

Applicando alla (11) l'operatore K, si ottiene la (12).

Si ha poi, direttamente,

$$\gamma\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b} + H(\mathbf{v}\,,\mathbf{a})\,\mathbf{b} = m\mathbf{a} + \mathbf{v}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} = n\mathbf{a}\,,$$

cioè la (13); e da questa, applicando l'operatore $K\alpha$ e poi $RK\alpha$, si deducono la (14) e la (15).

Notiamo da ultimo:

se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione di P e di t che mediante L si trasforma nel vettore $\mathbf{u}'$ tale che

$$\mathbf{u}' = \gamma\mathbf{u}\,, \tag{16}$$

risulterà

$$\mathbf{u}'\times\mathbf{v}' = \mathbf{u}\times\mathbf{b} + m\mathbf{u}\times\mathbf{v} \tag{17}$$

e, inversamente,

$$\mathbf{u} = \gamma'\mathbf{u}' \tag{16'}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\,\mathbf{u}'\times\mathbf{a} + m\mathbf{u}'\times\mathbf{v}'\,. \tag{17'}$$

Infatti, pel teorema di commutazione (I, pag. 32), dalla (16) deduciamo

$$\mathbf{u}'\times\mathbf{v}' = \mathbf{v}'\times\gamma\mathbf{u} = \mathbf{u}\times K\gamma\mathbf{v}'\,;$$

e poichè, per le (9), (2) e (3),

$$K\gamma\mathbf{v}' = K\alpha\mathbf{v}' + \mathbf{a}\times\mathbf{v}'\,.\,\mathbf{v} = n'\mathbf{v} + \mathbf{b} + (m - n')\,\mathbf{v} = \mathbf{b} + m\mathbf{v}\,,$$

così risulta la (17). Le (16′) e (17′) si deducono al modo solito da (16) e (17); e dal confronto colle (1) del § 1 risulta pure l'invariante

$$\mathbf{u}'^2 - (\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')^2 = \mathbf{u}^2 - (\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2\,.$$