ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sopra un metodo di approssimazione delle radici di un'equazione algebrica.* Nota della sig.na MARIA BRAGGIO, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

Il metodo che mi permetto qui di far conoscere è sostanzialmente noto; ma esso è poco o niente in uso nei trattati e nelle scuole, o perchè considerato adattabile a casi troppo particolari, o perchè giudicato non tanto semplice quando si voglia estenderlo a un gran numero di casi.

Il metodo, a dire il vero, non si presenta, nel suo complesso, molto organico: esso è quasi immediatamente applicabile ad alcune equazioni, mentre che, per altre, richiede una concatenazione tale di artifizii, che, applicati senza accortezza, potrebbero snaturarne la semplicità limpida ed elegante.

È noto ed è anche molto facile vedere come si possa rapidamente ricavare la cosiddetta equazione alle potenze [2] delle radici di un'equazione proposta, esprimendo razionalmente i coefficienti dell'equazione trasformata in funzione dei coefficienti dell'altra. La base del metodo di cui ora trattiamo, si può brevemente così esporre: Se il modulo di una delle radici dell'equazione proposta prevale notevolmente sui moduli delle altre, analoga prevalenza si accentua nell'equazione alle potenze, tanto più quanto più alto è il grado della potenza. Per esempio, se un'equazione ha le tre radici 1, 2, 8, l'equazione alle quarte potenze avrà le radici 1, 16, 4096. La prevalenza di 4096 sulle altre due radici 1 e 16, è molto più accentuata di quello che non sia la prevalenza di 8 sopra 1 e 2. La somma dei tre numeri 1, 2, 8 (cioè 11) è abbastanza lontana da 8; la radice quarta della somma dei tre numeri 1, 16, 4096 (cioè 4113), conduce al numero 8,008 che è molto più vicino a 8 di quel che non fosse il numero 11. Analogamente, se sommassimo le potenze decime, ed estraessimo la radice decima da questa somma, troveremmo un'approssimazione ancora maggiore.

Facilmente si può avere un'idea dell'approssimazione che si ottiene ricorrendo all'equazione alle potenze, e dell'errore che si fa quando alla grandezza h si sostituisce, per esempio, la grandezza $(h^n + l^n)^{\frac{1}{n}}$. Intanto si può osservare che tale errore sarà molto piccolo se il rapporto $\frac{l}{h}$ sarà di molto inferiore a 1, e se n sarà molto grande (quindi, man mano che l'equazione trasformata alle potenze aumenta di grado, l'errore d'approssimazione rim-

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1913.

[2] Ved., per esempio, L. Orlando, *Sull'equazione alle potenze*, questi Rendiconti, luglio 1912.

picciolisce sempre più). Indichiamo con ε tale errore che possiamo mettere sotto la forma

$$\varepsilon = (h^n + l^n)^{\frac{1}{n}} - h$$

$$= h\left[\left(1+\left(\frac{l}{h}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{n}\alpha^n + \binom{\frac{1}{n}}{2}\alpha^{2n} + \cdots\right],$$

dove si ponga $\frac{l}{h} = \alpha$ (molto picolo rispetto a 1).

Applichiamo ora un noto teorema di Cauchy, che stabilisce una semplice relazione fra serie ed integrali, estesi ad un intervallo infinito. Esso si può enunciare mediante la formola

$$\int_n^\infty f(x)\,dx > \mathrm{R}_n > \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx.$$

Ponendo

$$f(x) = \left|\binom{\frac{1}{n}}{x}\alpha^{2x}\right|$$

l' integrale corrispondente sarà

$$\int_n^\infty \left|\binom{\frac{1}{n}}{x}\alpha^{2x}\right| dx.$$

Il teorema della media mostra che si può scrivere

$$\left|\int_n^\infty \left|\binom{\frac{1}{n}}{x}\right|\alpha^{2n}\,dx\right| < \left|\binom{\frac{1}{n}}{n}\int_n^\infty \alpha^{2n}\,dx\right|.$$

Ma è

$$\int_n^\infty \alpha^{2n}\,dx = -\frac{\alpha^{2n}}{2\log\alpha}:$$

quindi avremo che il numero

$$\left|\binom{\frac{1}{n}}{n}\frac{\alpha^{2n}}{2\log\alpha}\right|$$

(evidentemente piccolissimo se α è abbastanza piccolo e se n è abbastanza grande) è maggiore dell'errore che si fa quando ad h si sostituisce $(h^n + l^n)^{\frac{1}{n}}$. Analogamente, considerando il caso del polinomio

$$(h_1^n + h_2^n + \cdots + h_m^n)^{\frac{1}{n}}$$

si avrebbero calcoli più complicati, perchè bisognerebbe ricorrere alla formola del polinomio; ma questo caso si può semplificare ricorrendo a un artificio, ponendo cioè uguali fra loro tutti gli h diversi dall'h di più alto modulo, in modo da ridurre il polinomio alla forma

$$(h_1^n + (m-1)\, h_2^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Non occorre evidentemente impossessarsi di tutti i coefficienti della trasformata alle potenze per avere la radice di più alto modulo: basta la somma delle radici della trasformata alle potenze; ma si può osservare che la somma delle potenze di grado m è una somma di Newton, cioè la cosiddetta s_m. L'intervento della trasformata alle potenze diventa dunque non essenziale; se qualche autore ha fermato l'attenzione sulla trasformata alle potenze, ciò dipende unicamente dal fatto che gli ulteriori coefficienti di questa trasformata possono, in alcuni casi rarissimi, lasciar trovare con sufficiente approssimazione anche le altre radici. Se si potessero avere comodamente le trasformate alle potenze d'ordine 100 o d'ordine 1000, allora gli ulteriori coefficienti (sottoposti a calcoli di spaventose dimensioni) potrebbero anche essere utili; ma noi riteniamo che la limpidezza del metodo resti da ciò annebbiata.

Supponiamo, ora, che non esista una radice la quale abbia il modulo molto prevalente sui moduli delle altre, ma che tuttavia esista una radice di massimo modulo (ciò non avviene, per esempio, quando si tratta di radici coniugate). Il numero $\sqrt[m]{s_m}$ darà (specialmente se m è grande) un valore approssimato del modulo più alto; ma questa approssimazione non sarà grande se i calcoli saranno semplici: con pochi calcoli si potrà avere un'approssimazione mediocre.

Supponiamo che la radice α sia stata approssimata a meno di un decimo, mediante il numero k. Si presenta naturale l'idea di fare la trasformata in

$$\xi = \frac{1}{x-k};$$

questa trasformata avrà una radice di modulo superiore a 10, e sarà dunque generalmente accessibile al metodo da noi descritto. Se ancora non basta, potremo iterare questo metodo.

Un buon segno di riconoscimento che l'equazione si presta all'applicazione del metodo, è dato dall'esame della successione

$$|s_1|,\ |s_2|^{\frac{1}{2}},\ |s_3|^{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

Se questi valori vanno ravvicinandosi fra di loro, allora essi si avvicinano anche al modulo della radice di maggior modulo.

Supponiamo che invece le radici di maggior modulo siano 2 o più di 2; per esempio, siano in numero di λ. Se k è questo più alto modulo comune a λ radici, allora $|s_m|^{\frac{1}{m}}$ vale all'incirca $k\lambda^{\frac{1}{m}}$, numero variabile considerevolmente con m, specialmente se λ è grande.

Il rapporto fra $|s_m|^{\frac{1}{m}}$ ed il successivo $|s_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}}$ vale all'incirca $\lambda^{\frac{m+1}{m}}$, numero che ci dà facilmente il valore esatto di λ, tenendo conto che λ è un numero intero e che basta pertanto un'approssimazione appena inferiore a 0,5 per determinarlo con esattezza.

Nel caso di radici complesse (coniugate), trovato che sia il modulo, si potrà ricorrere all'equazione alle semisomme per venire a capo della ricerca.

In caso di equazioni che, come per esempio le equazioni binomie, hanno molte radici di ugual modulo, l'esperienza e la sagacia del calcolatore suggeriranno una preventiva trasformazione di Tschirnhausen, atta ad eliminare questo inconveniente.

Un organico e minuzioso svolgimento delle idee qui esposte non potrebbe essere contenuto nei limiti necessariamente imposti a questo breve lavoro, destinato, più che ad altro, a porre in termini semplici un metodo fondato su considerazioni quasi evidenti e niente affatto complicate.

Meccanica. — *Un teorema generale sul moto incipiente dei sistemi vincolati.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Si consideri un sistema costituito da quantisivogliano punti P_i, comunque vincolati.

Sia $\mathbf{R}_i$ la *reazione* o *forza vincolare* che sta a rappresentare l'influenza dei legami sul punto P_i.

Ammesso che i vincoli sieno privi di attrito, il principio dei lavori virtuali ci assicura che, se δP_i designa lo spostamento subìto dal generico punto P_i, *il lavoro complessivo*

$$\delta A = \Sigma_i \mathbf{R}_i \times \delta P_i ,$$

non può essere negativo. Ciò che si può esprimere brevemente dicendo che le reazioni $\mathbf{R}_i$ si fanno equilibrio.

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1913.