ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Se questi valori vanno ravvicinandosi fra di loro, allora essi si avvicinano anche al modulo della radice di maggior modulo.

Supponiamo che invece le radici di maggior modulo siano 2 o più di 2; per esempio, siano in numero di λ. Se k è questo più alto modulo comune a λ radici, allora $|s_m|^{\frac{1}{m}}$ vale all'incirca $k\lambda^{\frac{1}{m}}$, numero variabile considerevolmente con m, specialmente se λ è grande.

Il rapporto fra $|s_m|^{\frac{1}{m}}$ ed il successivo $|s_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}}$ vale all'incirca $\lambda^{\frac{m+1}{m}}$, numero che ci dà facilmente il valore esatto di λ, tenendo conto che λ è un numero intero e che basta pertanto un'approssimazione appena inferiore a 0,5 per determinarlo con esattezza.

Nel caso di radici complesse (coniugate), trovato che sia il modulo, si potrà ricorrere all'equazione alle semisomme per venire a capo della ricerca.

In caso di equazioni che, come per esempio le equazioni binomie, hanno molte radici di ugual modulo, l'esperienza e la sagacia del calcolatore suggeriranno una preventiva trasformazione di Tschirnhausen, atta ad eliminare questo inconveniente.

Un organico e minuzioso svolgimento delle idee qui esposte non potrebbe essere contenuto nei limiti necessariamente imposti a questo breve lavoro, destinato, più che ad altro, a porre in termini semplici un metodo fondato su considerazioni quasi evidenti e niente affatto complicate.

Meccanica. — *Un teorema generale sul moto incipiente dei sistemi vincolati.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. Si consideri un sistema costituito da quantisivogliano punti P_i, comunque vincolati.

Sia $\mathbf{R}_i$ la *reazione* o *forza vincolare* che sta a rappresentare l'influenza dei legami sul punto P_i.

Ammesso che i vincoli sieno privi di attrito, il principio dei lavori virtuali ci assicura che, se δP_i designa lo spostamento subìto dal generico punto P_i, *il lavoro complessivo*

$$\delta A = \Sigma_i \mathbf{R}_i \times \delta P_i ,$$

non può essere negativo. Ciò che si può esprimere brevemente dicendo che le reazioni $\mathbf{R}_i$ si fanno equilibrio.

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1913.

È ragionevole invocare per le reazioni $\mathbf{R}_i$ il principio di sovrapposizione degli effetti (¹). In virtù di tale principio la simultaneità di più reazioni non reca alcuna modificazione alle singole reazioni: ciascuna di esse si comporta come agisse da sola. In modo preciso, si immagini di classificare (con criterio arbitrario) i legami del sistema in due gruppi distinti che denomino L' ed L''; sieno $\mathbf{R}'_i$ ed $\mathbf{R}''_i$ le rispettive reazioni vincolari riferentesi al punto P_i. È allora manifestamente

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}'_i + \mathbf{R}''_i .$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti ci dice che le reazioni $\mathbf{R}'_i$ non subiscono alcuna modificazione per la presenza o meno dei legami del gruppo L'', e parimenti le reazioni $\mathbf{R}''_i$ non risentono affatto della presenza dei legami del gruppo L'.

Una volta ammesso ciò, dal principio dei lavori virtuali scende immediatamente che le reazioni $\mathbf{R}'_i$ si fanno tra di loro equilibrio; come pure si fanno tra di loro equilibrio le reazioni $\mathbf{R}''_i$. Si può concludere che *in un sistema vincolato non solo tutte le forze vincolari si fanno equilibrio* **[principio dei lavori virtuali]**, *ma si equilibrano pure le forze vincolari provenienti da una parte qualsiasi dei vincoli* **[principio dei lavori virtuali e principio di indipendenza]**; *in particolare, si fanno equilibrio le reazioni che si riferiscono a ciascun legame del sistema.*

2. Ecco una questione in cui interviene utilmente il postulato ora enunciato.

Si immagini il sistema vincolato soggetto all'azione di forze assegnate, e in equilibrio. Sia $\mathbf{F}_i$ la risultante delle forze, applicate al generico punto P_i del sistema.

In ogni punto P_i la forza attiva $\mathbf{F}_i$ e la reazione vincolare $\mathbf{R}$ sono opposte:

(1) $$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 .$$

Suppongasi di liberare il sistema di parte de' suoi vincoli. Allora, in generale, l'equilibrio non è più possibile, ed il sistema, ora meno vincolato, si pone in movimento. Sia L' il gruppo formato dai legami che vengono conservati ed L'' quello costituito dai legami tolti. Sieno $\mathbf{R}'_i$ ed $\mathbf{R}''_i$ le corrispondenti reazioni vincolari, relative al punto P_i.

Essendo

(2) $$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}'_i + \mathbf{R}''_i ,$$

la (1) può scriversi ancora

(3) $$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}'_i + \mathbf{R}''_i = 0 .$$

(¹) Esso risulta espresso del resto, anche nella prima forma delle equazioni di Lagrange, che reggono il moto dei sistemi olonomi.

Una volta rimossi i vincoli del gruppo L″ il sistema — come si è già rilevato — si mette, in generale, in movimento.

Questo sarà retto dalle equazioni:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}'_i, \tag{4}$$

avendo designato con m_i la massa, e con $\mathbf{a}_i$ l'accelerazione del punto P_i. In particolare la (4) deve essere soddisfatta nell'istante iniziale; per cui detta $\mathbf{a}_i^{(0)}$ l'accelerazione iniziale del punto P_i, ed intendendo che $\mathbf{F}_i$ ed $\mathbf{R}'_i$ si riferiscano a quest'istante, si dovrà avere

$$m_i \mathbf{a}_i^{(0)} = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}'_i. \tag{5}$$

Ma prima che si inizii il movimento deve sussistere la (3); si può dunque sostituire a $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}'_i$ la espressione equivalente $-\mathbf{R}''_i$, con che la equazione (5) diviene

$$-m_i \mathbf{a}_i^{(0)} = \mathbf{R}''_i. \tag{6}$$

Dunque *le forze d'inerzia iniziali* $[-m_i \mathbf{a}_i^{(0)}]$ *eguagliano le reazioni che corrispondono ai vincoli tolti.*

Diciamo δP_i uno spostamento virtuale conciliabile, nell'istante accennato, con tutti i vincoli del sistema. Introducendo il lavoro virtuale delle forze di inerzia del moto incipiente:

$$\delta I = -\Sigma_i\, m_i \mathbf{a}_i^{(0)} \times \delta P_i, \tag{7}$$

da (6) si ricava

$$\delta I = \Sigma_i\, \mathbf{R}''_i \times \delta P_i. \tag{8}$$

Ma, per il postulato del num. precedente, le reazioni $\mathbf{R}''_i$ si fanno equilibrio, il che significa che *il lavoro virtuale*

$$\Sigma_i\, \mathbf{R}''_i \times \delta P_i$$

non può essere negativo, per qualunque spostamento conciliabile coi vincoli del gruppo L″ e quindi *a fortiori* per gli spostamenti conciliabili addirittura con tutti i legami del sistema. Si avrà pertanto

$$\delta I \geq 0, \tag{9}$$

cioè *le forze di inerzia iniziali si fanno equilibrio.*

Si è così condotti ad enunciare il seguente teorema:

Se in un sistema vincolato in equilibrio, si rimuovono alcuni vincoli, il sistema si pone, in generale, in movimento; nel moto incipiente le forze di inerzia si fanno equilibrio, qualunque sieno le forze esterne e qualisisiano i vincoli rimossi.

Una illustrazione assai semplice di questo teorema è offerta da un punto pesante in equilibrio su sostegno orizzontale levigato; posto che il sostegno venga tolto, il teorema ora enunciato mette in evidenza la circostanza ben nota, che nel moto incipiente del punto, la accelerazione è verticale.