ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Ancora sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1].

1. *Seconda disuguaglianza fra i caratteri d'una varietà a tre dimensioni.* — Come nella precedente Nota [2], consideriamo anche qui una varietà algebrica (irriducibile) V, a tre dimensioni, avente l'irregolarità bidimensionale $q > 0$, e indichiamo con $u_1, u_2, \ldots, u_q$ $\left(u_i = \int P_i dx_1 + Q_i dx_2 + R_i dx_3\right)$ q integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti, appartenenti ad essa. Ci proponiamo di ricercare una disuguaglianza fra i caratteri di V, la quale, una volta verificata, porti di conseguenza un legame funzionale fra qualche coppia di integrali semplici di 1ª specie della V stessa. Poichè il ragionamento che si dovrebbe fare in tal caso è analogo a quello della Nota precedente (n. 1), così ci limiteremo a qualche rapido cenno.

La dipendenza funzionale dei due integrali

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i u_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_i , \tag{1}$$

porta all'identità

$$\left\| \begin{matrix} \Sigma \lambda_i P_i , & \Sigma \lambda_i Q_i , & \Sigma \lambda_i R_i \\ \Sigma \mu_i P_i , & \Sigma \mu_i Q_i , & \Sigma \mu_i R_i \end{matrix} \right\| \equiv 0 , \tag{2}$$

cioè alle

$$\sum_{h,k} \begin{vmatrix} \lambda_h , \lambda_k \\ \mu_h , \mu_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_h , P_k \\ Q_h , Q_k \end{vmatrix} \equiv 0 \quad , \quad \sum_{h,k} \begin{vmatrix} \lambda_h , \lambda_k \\ \mu_h , \mu_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_h , Q_k \\ R_h , R_k \end{vmatrix} \equiv 0 , \tag{3}$$

$$\sum_{h,k} \begin{vmatrix} \lambda_h , \lambda_k \\ \mu_h , \mu_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_h , R_h \\ P_h , P_k \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

dove per h, k si devono porre le $\binom{q}{2}$ combinazioni binarie degli indici 1, 2, ..., q.

D'altra parte si considerino su V gli integrali doppî

$$\int \begin{vmatrix} P_h , P_k \\ Q_h , Q_k \end{vmatrix} dx_1 \, dx_2 + \begin{vmatrix} Q_h , Q_k \\ R_h , R_k \end{vmatrix} dx_2 \, dx_3 + \begin{vmatrix} R_h , R_k \\ P_h , P_k \end{vmatrix} dx_3 dx_1 , \tag{4}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1913.

[2] Questi Rendiconti, tom. XXII (1913), fasc. 7°, pp. 316-321. Cfr. anche l'altra Nota, *Sulle varietà algebriche che possiedono*, ecc., ibid., fasc. 6°, pp. 270-275.

che, a norma d'un teorema di Severi [1], sono di 1ª specie su V, ovvero si riducono a delle costanti. L'ipotesi che il numero N degli integrali doppî di 1ª specie, linearmente indipendenti, appartenenti a V, sia minore di $\binom{q}{2}$, porta almeno $\delta = \binom{q}{2} - \mathrm{N}$ gruppi di relazioni del tipo

$$(5)\quad \sum_{h,k} \varrho_{hk}^{(i)} \begin{vmatrix} \mathrm{P}_h , \mathrm{P}_k \\ \mathrm{Q}_h , \mathrm{Q}_k \end{vmatrix} \equiv 0 \quad , \quad \sum_{h,k} \varrho_{hk}^{(i)} \begin{vmatrix} \mathrm{Q}_k , \mathrm{Q}_k \\ \mathrm{R}_h , \mathrm{R}_k \end{vmatrix} \equiv 0 \quad , \quad \sum_{h,k} \varrho_{hk}^{(i)} \begin{vmatrix} \mathrm{R}_h , \mathrm{R}_k \\ \mathrm{P}_h , \mathrm{P}_k \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$
$$(i = 1 , 2 , \ldots , \delta) .$$

La condizione, perchè una fra queste terne, o una fra quelle che se ne deducono per combinazione lineare, sia del tipo (3), è che si possano trovare tre gruppi di numeri $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_q$, $\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_q$, $\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots , \sigma_\delta$ (gli elementi di ciascun gruppo non essendo tutti nulli), i quali verifichino le $\binom{q}{2}$ relazioni

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{\delta} \sigma_i \, \varrho_{hk}^{(i)} = \begin{vmatrix} \lambda_h , \lambda_k \\ \mu_h , \mu_k \end{vmatrix} .$$

D'altronde è noto che un tale sistema ammette soluzioni se

$$(7)\quad \mathrm{N} \leq 2(q-2) \; [2] :$$

e quindi, in quel caso, la varietà V possiede (almeno) due integrali semplici, distinti, di 1ª specie, che sono funzioni uno dell'altro, cioè, a norma del teorema dimostrato al n. 2 della già citata Nota, *Sulle varietà algebriche* ecc., contiene un fascio irrazionale di superficie, di genere almeno eguale a due.

Siccome inoltre, indicando con P_a , P_g i generi, aritmetico e geometrico, di V, si ha

$$(8)\quad \mathrm{N} \leq q + \mathrm{P}_g - \mathrm{P}_a \; [3] ,$$

così la proprietà suddetta sussiste certamente, se

$$q + \mathrm{P}_g - \mathrm{P}_a \leq 2(q-2) , \; \textit{cioè se} \; \mathrm{P}_g - \mathrm{P}_a \leq q - 4 .$$

[1] Severi, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie d'una varietà algebrica* [Annali di matematica (3), tom. XX (1913), pp. 201-216]. Conviene osservare che l'ordine con cui si succedono gli indici dei dx in ciascun termine dell'integrale (4) non è indifferente, in quanto uno scambio dei due indici relativi ad un termine produce in quel termine un cambiamento di segno.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XX (1905), pp. 55-60].

[3] Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXVIII (1909)], teor. XVIII.

Osserviamo, infine, che il ragionamento precedente presuppone l'ipotesi $q > 1$, che però risulta in definitiva superflua, dato che, se $q = 1$, la V contiene in ogni caso un fascio irrazionale (ellittico) di superficie [1]. Si può dunque affermare che:

Se fra il genere geometrico P_g, *il genere aritmetico* P_a, *e l'irregolarità bidimensionale* $q > 0$ *d'una varietà* V *a tre dimensioni intercede la disuguaglianza*

$$\text{(II)} \qquad P_g - P_a \leq q - 4\,,$$

la varietà possiede un fascio irrazionale di superficie che, se non è $q = 1$ (nel quale caso il fascio è ellittico), *ha il genere almeno eguale a due.*

2. *Qualche conseguenza delle due disuguaglianze trovate.* — Consideriamo dapprima una varietà V a tre dimensioni, con $P_g = 1$ e $q > 3$. Siccome tali caratteri verificano la disuguaglianza (I) della precedente Nota (n. 2), così, in base al teorema là dimostrato, possiamo concludere che V contiene uno dei sistemi seguenti:

a) congruenza, o fascio [2], d'irregolarità (genere) q;

b) congruenza, o fascio, d'irregolarità (genere) $q - 1$;

c) fascio di genere $q - 2$.

Dimostriamo ora che si verifica sempre il caso *a*). Nell'ipotesi *c*), poichè, per il teorema sopra ricordato, il genere del fascio è ≥ 2, e d'altronde q è ≥ 4, si potranno su V considerare quattro integrali semplici di 1ª specie, linearmente indipendenti, u_1, u_2, u_3, u_4, dei quali i due primi si mantengono costanti lungo le superficie del fascio, e gli altri due no. Ma allora, non potendo i due determinanti

$$\begin{vmatrix} P_1\,, Q_1\,, R_1 \\ P_3\,, Q_3\,, R_3 \\ P_4\,, Q_4\,, R_4 \end{vmatrix}\,, \quad \begin{vmatrix} P_2\,, Q_2\,, R_2 \\ P_3\,, Q_3\,, R_3 \\ P_4\,, Q_4\,, R_4 \end{vmatrix}\,, \quad P_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\,, \text{ ecc.}$$

essere linearmente indipendenti, perchè ciò porterebbe $P_g \geq 2$, il determinante

$$\begin{vmatrix} P_1 + \lambda P_2\,, & Q_1 + \lambda Q_2\,, & R_1 + \lambda R_2 \\ P_3\,, & Q_3\,, & R_3 \\ P_4\,, & Q_4\,, & R_4 \end{vmatrix}$$

sarà identicamente nullo, per un conveniente valore λ_0 di λ. Posto allora $u = u_1 + \lambda_0 u_2$ [3] si dovrà verificare uno dei due casi seguenti:

(1) Cfr. l'osservazione alla fine del n. 1 della precedente Nota.

(2) Scriviamo brevemente, qui e nel seguito, *congruenza*, o *fascio*, in luogo di *congruenza irregolare, d'indice 1, di curve algebriche*, o *fascio irrazionale di superficie algebriche.*

(3) S'intende che potrà anche essere $\lambda_0 = \infty$, cioè $u = u_2$.

1°) u, u_3, u_4 sono funzionalmente dipendenti senza che lo siano due tra essi. Allora V possiede una congruenza Σ, la cui irregolarità è $\geq q-1$ (Nota precedente, n. 2);

2°) due fra gl'integrali u, u_3, u_4 sono funzionalmente dipendenti. Siccome non possono esserlo u, u_3, e neppure u, u_4, perchè in tal caso u_3, oppure u_4, si manterrebbero, contro l'ipotesi, costanti lungo le superficie del fascio appartenente a V, così sarà u_3 funzione di u_4. Ma, allora, entro V si avrà un altro fascio di superficie, lungo cui si manterranno costanti u_3, u_4, e l'intersezione dei due fasci genererà una congruenza di curve che risulteranno di livello costante per tutti gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti a V. Tale congruenza avrà dunque l'irregolarità q.

Siamo dunque ricondotti ai casi a), b). Per esaminare il secondo di questi, distingueremo due sottocasi:

α) V possiede un fascio Φ di genere $q-1$. Allora si possono considerare su V $q-1$ integrali semplici di 1ª specie, linearmente indipendenti, $u_1, u_2, \ldots, u_{q-1}$, ciascuno dei quali ha $2(q-1)$ periodi e si mantiene costante lungo le superficie di Φ; e perciò V possiede un ulteriore integrale (semplice, ecc.) u_q, riducibile ad ellittico: cioè contiene un fascio ellittico Ψ di superficie $u_q =$ cost. L'intersezione dei due fasci Φ, Ψ dà dunque luogo ad una congruenza d'irregolarità q.

β) V possiede una congruenza Σ d'irregolarità $q-1$ e (quindi) un fascio ellittico Ψ le cui superficie non sono composte con curve di Σ. Allora, mediante l'intersezione dei due sistemi Σ, Ψ si genera su V un'involuzione birazionalmente identica alla varietà W delle coppie di punti d'una superficie F d'irregolarità $q-1$ e d'una curva ellittica C. Poichè ogni integrale triplo di 1ª specie appartenente a W si trasforma, mediante la sostituzione razionale che intercede fra le coordinate dei punti di W e quelle dei punti di V, in un integrale analogo appartenente a V, così il genere geometrico P'_g di W sarà ≤ 1; e siccome esso risulta eguale al prodotto del genere di C per il genere geometrico p_g di F (¹), così si avrà $p_g \leq 1$. D'altronde l'irregolarità bidimensionale di W è eguale a quella di V (perchè ogni integrale semplice di 1ª specie appartenente a V riprende, a meno dei periodi, lo stesso valore nei punti di un gruppo dell'involuzione considerata, e quindi proviene da un integrale analogo di W), cioè è > 3, e perciò il genere aritmetico di F risulta < -1. La superficie F è dunque riferibile ad una rigata di genere $q-1$ (²), alle cui generatrici rispondono su W e su V le superficie d'un fascio Φ che si comporta come in α).

(¹) Severi, *Fondamenti* ecc. (citata), n. 28.

(²) Castelnuovo, *Sulle superficie* ecc. (citata), n. 4; Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, tom. XX (1905), pp. 61-72], n. 1.

Si conclude, in definitiva, che le varietà V a tre dimensioni, con $P_g = 1$ e $q > 3$, presentano sempre il caso a). Siccome, d'altronde, il caso stesso si presenta per $q = 1, 2$ [1], ed anche per $q = 3$, fatta, in quest'ultima ipotesi, eccezione per le varietà che contengono un'involuzione birazionalmente identica alla propria varietà di Picard [2], così possiamo enunciare che:

Le varietà algebriche a tre dimensioni di genere geometrico $P_g = 1$ *e d'irregolarità bidimensionale* $q > 0$ *contengono una congruenza d'indice 1, e d'irregolarità* q, *di curve algebriche, o un fascio di genere* q *di superficie algebriche; ovvero hanno l'irregolarità bidimensionale* $q = 3$ *e sono trasformabili razionalmente nella relativa varietà di Picard* [3].

Consideriamo ora una varietà V, a tre dimensioni, avente l'irregolarità tridimensionale negativa ($P_g < P_a$). Se è $q > 2$ ovvero $q = 2$, e $P_g - P_a < -1$, i caratteri di V soddisfano la disuguaglianza (II) di questa Nota, e perciò V possiede un fascio irrazionale di superficie (di genere ≥ 2), che esiste, come è noto, anche per $q = 1$ (nel quale caso è ellittico).

Supponiamo ora, che sia $q = 2$, $P_g - P_a = -1$. Allora, se V non possiede un fascio di genere 2, essa conterrà, per un citato teorema di Severi, una congruenza Σ d'irregolarità 2. Indichiamo con F una superficie, di generi p_g, p_a, imagine della congruenza.

Poichè, mediante un noto procedimento [4], da ogni integrale doppio di 1ª specie appartenente ad F possiamo dedurre un integrale analogo di V, e, in virtù della (8), il numero di questi integrali è, su V, ≤ 1, così sarà $p_g \leq 1$. Ma il caso $p_g = 0$, $p_a = -2$ si scarta perchè F sarebbe riferibile ad una rigata alle cui generatrici risponderebbero, su V, superficie variabili in un fascio di genere 2; dunque sarà $p_g = 1$, $p_a = -1$. Concludiamo che:

Le varietà algebriche a tre dimensioni d'irregolarità tridimensionale $P_g - P_a$ *negativa, e d'irregolarità bidimensionale* q *positiva, contengono un fascio irrazionale di superficie che, se* $q > 1$, *ha il genere almeno eguale a due; ovvero hanno l'irregolarità bidimensionale* $q = 2$, *l'irregolarità tridimensionale* $P_g - P_a = -1$, *e contengono una congruenza d'indice 1 di curve algebriche, avente i generi* $p_g = 1$, $p_a = -1$.

In quest'ultimo caso, mediante l'involuzione generata su V dalle intersezioni delle curve appartenenti alla congruenza, colle superficie d'un fascio razionale, *la* V *si può trasformare razionalmente nella varietà* W *delle*

(1) Severi, *Sulle superficie e varietà algebriche di genere geometrico nullo* [Questi Rendiconti (5), tom. XX (1911), pp. 537-546], n. 6.

(2) Severi, *Relazioni* ecc. (citata), n. 6.

(3) Una varietà di Picard a tre dimensioni e a moduli generali ha precisamente $P_g = 1$ $\quad = 3$, e non contiene alcun sistema d'indice 1 di varietà subordinate.

(4) Cfr. Severi, *Fondamenti* ecc. (citata), n. 27.

coppie di punti d'una curva razionale C *e d'una superficie* F *di generi* $p_g = 1$, $p_a = -1$ (¹).

3. *Cenno d'estensione alle varietà superiori.* — Mediante ragionamenti analoghi a quelli esposti in questa e nella precedente Nota, si prova che, se il numero N_i degli integrali i-pli di 1ª specie d'una varietà a k dimensioni V_k, d'irregolarità bidimensionale $q > 0$, verifica la disuguaglianza

$$\text{(III)} \qquad N_i \leq i(q-i),$$

la V_k contiene un sistema algebrico Σ, ∞^l, $(1 \leq l \leq i-1)$, d'indice 1, di varietà algebriche M_{k-l}, avente l'irregolarità bidimensionale almeno eguale ad $l+1$.

In particolare per $i = k$, la (III) può scriversi

$$P_g \leq k(q-k),$$

ed è soddisfatta se $P_g = 1$, $q > k$. Ricordando i risultati di Severi relativi al caso $q < k$, si conclude che ogni V_k con $P_g = 1$ e $q \neq k$ contiene un sistema d'indice 1 di varietà algebriche subordinate, avente l'irregolarità bidimensionale positiva.

Chimica. — *Sulla tendenza a combinarsi fra alogenuri e altri sali dello stesso metallo. Fluoruri, cloruri e carbonati* (²). Nota di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician (³).

In alcune Note precedenti (⁴) facevo notare come alcuni sali alcalini, mentre per solidificazione delle masse fuse formano sali doppî con i rispettivi fluoruri, solidificano in miscela eutettica con i corrispondenti cloruri.

Da precedenti ricerche risultava che ciò avviene tra fluoruri, cloruri e solfati di sodio e di potassio; le mie ricerche confermavano analogo comportamento tra fluoruro, cloruro e fosfati di potassio. Mostravo, però, che tale diversità sembra non si mantenga per altri sali, ad es., di metalli bivalenti:

(¹) La varietà W ha effettivamente $q = 2$, $P_g - P_a = -1$; cfr. Severi, *Fondamenti* ecc. (citata), n. 28. Inoltre, se F non possiede fasci irrazionali (ad es., se si tratta d'una superficie di Picard a moduli generali), non ne può possedere neppure W. Basta invero osservare che se W contenesse un fascio irrazionale di superficie, questo dovrebbe esser composto colle curve della congruenza esistente su W (altrimenti sarebbe $q > 2$), e quindi avrebbe per corrispondente su F un fascio irrazionale di curve.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(³) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1913.

(⁴) Questi Rendiconti, XXI, 2° sem., pagg. 182, 688, 768.