ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

racemica. Questo corpo dà, in tale solvente, più facilmente soluzioni soprasature, che non le canfore. L'equilibrio si raggiunge quindi più lentamente; ma è poi più stabile alle oscillazioni di temperatura, ciò che permette maggior esattezza nelle determinazioni polarimetriche.

Quant. delle due canforossime adoperate con 100 cc. di solvente		α osservato (tubo di 20 cm.).
5	5	0°,0
10	5	+ 3 ,10
15	5	+ 4 ,49
20	5	+ 4 ,49
25	5	+ 4 ,49

Conclusione.

Da quanto fu sopra esposto risulta che la determinazione di confronto del calore di soluzione (in soluzione diluita) di antipodi ottici e delle loro miscele inattive, oltre a dare un'idea dell'affinità che lega, nei racemi, i due componenti attivi, può anche aggiungere un criterio sulla esistenza, o meno, del composto racemico allo stato solido, o liquido, specialmente quando a queste determinazioni si associ lo studio degli equilibrî che si stabiliscono in soluzione satura in un dato solvente, essendo presenti tutte le fasi solide relative, che possono coesistere.

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Nota I di Carlo Rosati, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo [1].

Nel presente lavoro (Note I e II), applicando il classico risultato di Hurwitz [2] sulla base del sistema di corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, si stabilisce una rappresentazione delle medesime sui punti razionali di uno spazio lineare, e si dànno alcune interpretazioni di certi legami che possono sussistere fra le corrispondenze stesse.

§ 1.

1. Date due curve $C_1\,C_2$, di generi $p_1\,p_2$, distinte o sovrapposte, una stessa lettera indicherà tanto una corrispondenza fra i loro punti, quanto la curva che la rappresenta sulla superficie F, con due fasci unisecantisi $\{K_x\}\,\{K_y\}$,

[1] Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1913.

[2] Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip.* Math. Annalen, Bd. 28 (1886).

delle coppie di punti di $C_1 C_2$; e, salvo speciale avvertenza, la corrispondenza potrà essere indifferentemente effettiva o virtuale (di indici positivi, nulli, e negativi).

Ricordiamo che una corrispondenza T a valenza zero ($T \equiv 0$) dà origine su F all'equivalenza lineare $T \equiv T_x + T_y$ in cui T_x e T_y sono i gruppi (anche virtuali) delle K_x e delle K_y uscenti dai punti in cui T è segata da una fissata K_y e da una fissata K_x (¹).

Due corrispondenze si diranno *equivalenti* quando la loro differenza è a valenza zero; *residue*, se è a valenza zero la loro somma.

Si osservi subito che: *Data una corrispondenza virtuale, esistono certo corrispondenze effettive e irriducibili, ad essa equivalenti e residue.*

Sia infatti $A - B$ la curva virtuale immagine della corrispondenza. Se A' indica una qualsiasi curva residua di A, cioè tale che $A + A' \equiv 0$, si costruisca, sommando due convenienti serie lineari contenute nei fasci $\{K_x\}\{K_y\}$, un sistema lineare così ampio da contenere parzialmente $A' + B$ e da lasciare come residua una curva T irriducibile e priva di punti multipli. Dalle equivalenze $A + A' \equiv 0$, $A' + B + T \equiv 0$, si deduce $T - (A - B) \equiv 0$, cioè T è equivalente ad $A - B$.

Operando analogamente su B si giunge ad una corrispondenza residua.

2. Si può dare, dal punto di vista dell'*analysis situs*, una semplice interpretazione della corrispondenza a valenza zero.

Sia T una corrispondenza (n, ν) effettiva fra i punti delle curve $C_1 C_2$. Se un punto x di C_1 descrive un ciclo σ, i punti del gruppo corrispondente G_ν si permutano fra loro, ed è chiaro che ciascuna sostituzione circolare in cui si scompone la sostituzione prodotta sui punti di G_ν equivale ad un ciclo di C_2; la somma dei cicli così ottenuti darà un ciclo σ' che diremo *omologo* di σ per la T. Orbene: *La condizione perchè* T *sia a valenza zero, è che ogni ciclo di* C_1 *abbia sempre per omologo in* C_2 *un ciclo nullo.*

Sia infatti w un integrale di 1ª specie *qualsiasi* di C_2, e si consideri la somma $w(y_1) + w(y_2) + \cdots + w(y_\nu)$ dei valori che esso assume nei punti di G_ν. Essa sarà un integrale di 1ª specie $W(x)$ di C_1; e dal fatto che il periodo di W relativo al ciclo σ è uguale al periodo di w relativo all'omologo σ', segue facilmente l'asserto.

Se il generico gruppo G_ν contiene punti multipli, in σ' deve esser contata r volte ogni componente che deriva da una sostituzione ciclica su punti di molteplicità r.

Se poi la T è virtuale, cioè $G_\nu = G_{\nu'} - G_{\nu''}$, basta porre $W(x)$ uguale alla differenza fra le somme dei valori di w nei punti di $G_{\nu'}$ e di $G_{\nu''}$: e la proprietà continua a sussistere purchè, nella costruzione di σ', si muti il

(¹) Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie.* Memorie della R. Accademia delle Sc. di Torino (2), tom. 54 (1903).

senso alle componenti che derivano dalla sostituzione prodotta sui punti di $G_{\nu''}$.

Di qui discende che: *Data sopra una curva* C *di genere* p *una corrispondenza* T *a valenza* γ, *e detto* σ' *l'omologo per la* T *di un ciclo arbitrario* σ, *sarà* $\sigma' \equiv -\gamma\sigma$.

Ritroviamo infine per questa via la seguente proprietà dimostrata recentemente da Severi [1]: *Ogni corrispondenza dipendente dall'identità è a valenza.*

Si supponga, infatti, che l'identità e una corrispondenza T dipendano secondo i numeri l, m; e indichi σ' l'omologo per la T di un ciclo arbitrario σ. Se σ e σ' sono legati ai $2p$ cicli $\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_{2p}$ di un sistema primitivo dalle relazioni

$$\sigma \equiv r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + \cdots + r_{2p}\sigma_{2p}$$
$$\sigma' \equiv s_1\,\sigma_1 + s_2\,\sigma_2 + \cdots + s_{2p}\,\sigma_{2p}\,,$$

dall'ipotesi fatta discendono le uguaglianze

$$lr_i + ms_i = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

le quali, poichè gl'interi r_i sono arbitrarî, esigono che sia l multiplo di m. Posto allora $l = \gamma m$, esse divengono

$$\gamma r_i + s_i = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

da cui si deduce che $\sigma' \equiv -\gamma\sigma$, cioè che la T possiede la valenza γ.

3. Diremo *carattere di Castelnuovo o carattere* Ω di una corrispondenza T di indici α, β, e grado virtuale ν, la differenza $2\alpha\beta - \nu$.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA [2]. — *Il carattere* Ω *di una corrispondenza* T *è* ≥ 0; *ed è nullo allora, e soltanto allora, che la* T *è a valenza zero.*

Poichè due corrispondenze equivalenti o residue hanno lo stesso carattere Ω [3], per la proprietà del n. 1 potremo supporre che la curva T, im-

(1) Severi, *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 48 (1912-1913).

(2) Il quale è di Severi e trovasi nella sua Nota ultimamente citata. La dimostrazione che egli ne dà è indipendente dal criterio di Castelnuovo, ed è fatta allo scopo di ritrovare per altra via il criterio stesso. Qui mostriamo invece, perchè ciò è più conforme all'indole del nostro lavoro, come ad esso si riduca immediatamente il teorema enunciato.

(3) Per due corrispondenze residue T′ T″ ciò si prova subito, scrivendo l'equivalenza $T' + T'' \equiv (T'_x + T''_x) + (T'_y + T''_y)$, segando poi i due membri con T′ e T″ e confrontando infine le uguaglianze ottenute. Se T′ e T″ sono equivalenti, basta osservare che una residua dell'una lo è anche dell'altra.

magine della corrispondenza (α, β), sia effettiva, irriducibile e priva di punti multipli. Detti ν e ϱ il grado ed il genere virtuale di T (che, in tal caso, è anche effettivo), si ha la relazione ([1])

$$2(\varphi-1)-\nu=2\beta(p_1-1)+2\alpha(p_2-1).$$

Se ora δ e δ' sono i numeri dei contatti di T con le curve dei fasci $\{K_x\}$ $\{K_y\}$, dalla considerazione delle involuzioni che su T segano i fasci medesimi, si traggono le uguaglianze

$$2(\varphi-1)=\delta+2\beta(p_1-1)=\delta'+2\alpha(p_2-1),$$

le quali, combinate con la precedente, dànno origine alle altre

$$2\alpha\beta-\nu=2\alpha(\beta+p_2-1)-\delta=2\beta(\alpha+p_1-1)-\delta';$$

ed esse provano l'asserto, appena si osservi che le differenze $2\alpha(\beta+p_2-1)-\delta$, $2\beta(\alpha+p_1-1)-\delta'$ rappresentano il *difetto di equivalenza* delle serie γ_β, γ_α, descritte su C_1 e C_2, dai gruppi corrispondenti ai punti di C_2 e di C_1 ([2]).

4. Da ora innanzi supporremo che le curve C_1 e C_2 siano sovrapposte. I due fasci $\{K_x\}$ e $\{K_y\}$ saranno allora birazionalmente identici, e la F possiederà una involuzione quadratica I_2, i cui punti doppî generano la curva, unisecante i due fasci, che rappresenta l'identità.

Diremo *carattere simultaneo* di due corrispondenze $T_1(\alpha_1\beta_1)$ $T_2(\alpha_2\beta_2)$, aventi ν_{12} coppie comuni ([3]), l'espressione $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\nu_{12}$; e quando tale carattere è nullo, le due corrispondenze si diranno *coniugate*.

Poichè le corrispondenze inverse T_1^{-1} T_2^{-1} hanno per immagine su F le curve *congiunte* di T_1 e T_2 nella involuzione I_2, segue che il carattere simultaneo di due corrispondenze è uguale a quello delle loro inverse; e, in particolare, se due corrispondenze sono coniugate, sono tali anche le loro inverse.

Sia T_1 coniugata di T_2^{-1}; per l'osservazione precedente, sarà T_2 coniugata di T_1^{-1}: due corrispondenze tali che l'una sia coniugata dell'inversa dell'altra, si diranno *anticoniugate*.

5. Può una corrispondenza dipendere dalla sua inversa? Se T è una tale

([1]) De Franchis, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*. Rendiconti di Palermo, tomo XVII (1903), n. 8.

([2]) Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*. Rendiconti dei Lincei (5), vol. XV, 1906.

([3]) Se le corrispondenze sono virtuali, ed A — B, C — D sono le loro immagini su F, deve intendersi $\nu_{12}=[AC]-[BC]-[AD]+[BD]$.

corrispondenza, avremo: $\lambda T + \mu T^{-1} \equiv 0$, e quindi [1] $\lambda T^{-1} + \mu T \equiv 0$. Sommando le precedenti relazioni, si ottiene $(\lambda + \mu)(T + T^{-1}) \equiv 0$, da cui si deduce che dovrà essere o $\lambda + \mu = 0$, cioè $T - T^{-1} \equiv 0$, ovvero $T + T^{-1} \equiv 0$; dunque:

Due corrispondenze, l'una inversa dell'altra, dipendenti, devono essere o equivalenti o residue.

6. Diremo *carattere* K di una corrispondenza non simmetriea T il carattere simultaneo di T e T^{-1}. Se la $T(\alpha, \beta)$ possiede u punti uniti e d coppie involutorie, è chiaro che le curve immagini di T e T^{-1} si segano in $u + 2d$ punti; dunque sarà $K = \alpha^2 + \beta^2 - (u + 2d)$.

Per le corrispondenze simmetriche (coincidenti con le loro inverse) sarà $K = \Omega$.

Supposto che a una corrispondenza T spettino i caratteri Ω, K, i caratteri di Castelnuovo delle corrispondenze $T + T^{-1}$ e $T - T^{-1}$ sono manifestamente $2\Omega + 2K$ e $2\Omega - 2K$; dal teorema del n. 3 si ottiene allora:

Fra i caratteri Ω, K *di una corrispondenza* T, *sussistono le disuguaglianze*

$$-\Omega \leq K \leq \Omega;$$

e sarà $K = -\Omega$ *quando (e soltanto quando) la* T *è residua della sua inversa; sarà* $K = \Omega$ *quando (e soltanto quando) la* T *è equivalente alla sua inversa (in particolare, coincidente con essa).*

Se la $T(\alpha, \beta)$ non è simmetrica, ha il grado virtuale ν e possiede u punti uniti e d coppie involutorie, le disuguaglianze precedenti si trasformano nelle altre

$$(\alpha - \beta)^2 + \nu \leq u + 2d \leq (\alpha + \beta)^2 - \nu,$$

le quali assegnano due limiti, inferiore e superiore, per l'espressione $u + 2d$; limiti rispettivamente raggiunti (allora e soltanto) allora che la corrispondenza sia equivalente, ovvero residua della sua inversa.

Osservazione. — Se T è a valenza γ, applicando alle corrispondenze T e T^{-1} la formula di Hurwitz [2] che dà il numero delle coppie comuni a due corrispondenze a valenza, si deduce

$$u + 2d = \alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma^2.$$

[1] Severi, *Sulle corrispondenze* ecc. (loc. cit.), § 3, n. 9.
[2] Hurwitz, loc. cit., § 5.

Ora, detta K la corrispondenza identica, la T e la γK, essendo residue, avranno lo stesso carattere Ω (n. 3); dunque sarà

$$2\alpha\beta - \nu = 2p\gamma^2 ,$$

e, perciò,

$$u + 2d = (\alpha - \beta)^2 + \nu ;$$

il che concorda col fatto che una corrispondenza a valenza è equivalente alla sua inversa.

Fisiologia vegetale. — *La degenerazione nucleare provocata dall'uranio nella cellula vegetale* [1]. Nota di C. Acqua, presentata dal Socio R. Pirotta [2].

In una mia comunicazione fatta nello scorso anno alla Società dei medici e naturalisti in Roma, ed inserita nel vol. XIV degli Archivi di farmacologia sperimentale e scienze affini, io riferiva sul risultato di studî intrapresi da lungo tempo sull'azione dell'uranio nei vegetali. Uno di tali risultati, e forse il più notevole, è che soluzioni assai diluite di un sale di uranio (si presta egregiamente il nitrato di uranile in soluzione acquosa $^1/_{10000}$) arrestano immediatamente l'accrescimento degli organi radicali, perchè l'uranio si fissa nei nuclei dei tessuti embrionali dei meristemi, impedendo il processo della cariocinesi. Molto più lenta è invece la penetrazione, nei tessuti degli organi verdi aerei, i quali anzi in certi casi sembrano risentire pochissimo l'azione dell'uranio.

Nella mia succitata comunicazione esprimevo il desiderio che tali ricerche fossero anche da altri continuate, ed estese possibilmente alla cellula animale.

Intanto io per mio conto non ho mancato di proseguire nello studio della quistione; e tra non molto pubblicherò una Memoria su tutte le mie ricerche compiute. Intanto credo opportuno di far precedere la presente breve comunicazione concernente appunto l'azione inibitrice del processo cariocinetico esercitata sui nuclei dall'uranio. Si può domandare perchè l'uranio, una volta fissato, come già io dissi, sotto forma probabile di ossido giallo visibile senza alcuna speciale reazione direttamente con il microscopio, impedisca il processo cariocinetico senza distruggere, almeno apparentemente, il nucleo; e si può anche ricercare in che cosa consista l'alterazione pro-

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1913.