ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

cellula animale. Premessa anche l'opportunità di estendere lo studio in parola a particolari casi, fra i quali quelli di moltiplicazioni cellulari anormali, io concludeva con le seguenti parole: « Infine, rammentando l'analogia esistente tra la cellula vegetale e quella animale per un gran numero di fenomeni ad ambedue comuni, sarebbe opportuno di compiere un simile studio anche per gli organismi animali ».

Un tale desiderio ed augurio io mi permetto di ripetere ancora, poichè son certo che potrebbero derivarne risultati molto interessanti, per lo meno dal punto di vista comparativo.

Matematica. — *Sulla equazione funzionale*

$$f(x+y)=\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, Y_i(y)$$

[Estratto di una lettera del prof. P. Stäckel al prof. T. Levi-Civita]. Nota di PAUL STÄCKEL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

. . . .

Ho letto con piacere la sua Nota [2] sopra l'equazione funzionale

$$(1) \qquad f(x+y)=\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, Y_i(y) \; [3].$$

Mi permetto di comunicarle una nuova dimostrazione del suo elegante risultato, la quale — mi sembra — conduce assai rapidamente allo scopo.

Le funzioni X_i, Y_i sieno, secondo le sue premesse, linearmente indipendenti. Si possono allora scegliere n costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in tal guisa che risulti diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} Y_1(c_1) \ldots Y_n(c_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Y_1(c_n) \ldots Y_n(c_n) \end{vmatrix} .$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1913.

[2] In questi Rendiconti, vol. XXII, 2° sem. 1913, pp. 181-183.

[3] Il collega Levi-Civita mi prega di far notare che questa equazione era già stata precedentemente considerata dal sig. Cyp. Stéphanos. Cfr. *Sur une catégorie d'équations fonctionelles* (comunicazione presentata al Congresso di Heidelberg, 1904), Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVIII, pp. 360-362. La forma dell'integrale è ivi dedotta come corollario della condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione di due variabili indipendenti x, y sia del tipo $\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, Y_i(y)$.

Posto, nella (1), $y = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, avremo

$$f(x + c_k) = \sum_i X_i(x)\, Y_i(c_k), \tag{2}$$

e potremo trarne

$$X_i(x) = \sum_k A_k\, f(x + c_k), \tag{3}$$

le $A_1, A_2, \ldots, A_n$ designando delle costanti.

Ne consegue

$$\begin{aligned} X_i(x + y) &= \sum_k A_k\, f(x + y + c_k) = \sum_k A_k \sum_l X_l(x)\, Y_l(y + c_k) \\ &= \sum_l X_l(x)\, Z_{il}(y), \end{aligned} \tag{4}$$

donde apparisce che anche le funzioni $X_i(x)$ verificano una equazione funzionale della forma (1).

Derivando rispetto ad y e ponendo, a derivazione eseguita, $y = 0$, si ottiene

$$X'_i(x) = \sum_l X_l(x)\, Z_{il}(o), \tag{5}$$

ossia: le funzioni $X_i(x)$ soddisfano a equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti. Sarà pertanto

$$X_i(x) = P_{1i}(x)\, e^{\omega_1 x} + P_{2i}(x)\, e^{\omega_2 x} + \cdots P_{ri}(x)\, e^{\omega_r x}, \tag{6}$$

dove $P_{1i}(x), \ldots, P_{ri}(x)$ indicano polinomî ed $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ delle costanti.

Siccome, per $y = 0$, la (1) porge

$$f(x) = \sum_i X_i(x)\, Y_i(o), \tag{7}$$

così in definitiva anche $f(x)$ *è necessariamente una somma di prodotti del tipo* $P(x)\, e^{\omega x}$.

. . . .

E. M.