ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

		Grandezze dell'astro
Sett.	7	10.9
"	8	10.6
"	26	11.0
Ott.	5	11.0
Ott.	19	12.6
"	20	12.9
"	21	12.9
"	23	*12.4*
"	24	12.7
"	28	13.2
"	31	13.0

Astronomia. — *Distribuzione delle protuberanze sulla superficie del sole.* Nota del Socio A. RICCÒ.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un'applicazione della convergenza in media.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

Il prof. E. Fischer [1] ha introdotto di recente un concetto che sembra dovere riuscire di grande utilità in varî punti del calcolo integrale, l'integrazione essendo definita nel senso del Lebesgue. Una successione di funzioni $f_n(t)$ della variabile reale t, data in un intervallo (a, b), si dice possedere la *convergenza in media* se le funzioni sono sommabili insieme coi loro quadrati nel detto intervallo e se, per ε, esiste un numero $\bar{n}$ tale che per ogni coppia di interi m, n superiori ad $\bar{n}$, si ha

$$\int_a^b (f_m(t) - f_n(t))^2 \, dt < \varepsilon ;$$

si dice, poi, che la successione *tende in media* ad $f(t)$, pure sommabile insieme col suo quadrato, se, preso ε, esiste un numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ si abbia

$$\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 \, dt < \varepsilon .$$

La definizione del Fischer si estende, naturalmente, ad un sistema di funzioni di t sommabili insieme coi loro quadrati nell'intervallo (a, b) e

[1] Comptes Rendus, tom. 144, pag. 1022 (1907).

dipendenti da un parametro reale r [1]: si potrà dire che le $f(t, r)$ *tendono in media ad* $f(t)$ *quando* r *tende ad* r_0, se, preso ε, si può determinare un δ tale che, per $|r - r_0| < \delta$, sia

$$\int_a^b (f(t) - f(t, r))^2 \, dt < \varepsilon ;$$

bene inteso, a seconda dei casi, r può tendere a zero per un sistema di valori inferiori, o un sistema di valori superiori, o valori parte inferiori, parte superiori ad r_0.

Nella presente brevissima comunicazione, mi propongo di dare una applicazione ovvia di questa proprietà alla rappresentazione di una funzione analitica.

Sia $\varphi(x)$ una funzione della variabile complessa x, analitica e regolare entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio 1, che per brevità dirò cerchio (1): sulla circonferenza (1), nulla viene supposto per la funzione. Essendo $x = re^{it}$, r modulo e t argomento della variabile, siano $\alpha(r, t)$ e $\beta(r, t)$ la parte reale e l'immaginaria della funzione; è dunque

$$\varphi(x) = \alpha(r, t) + i\beta(r, t) \, , \quad 0 \leq r < 1 \, , \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

Per $r < 1$, le funzioni $\alpha(r, t)$, $\beta(r, t)$ sono naturalmente sommabili in quanto funzioni di t, esse ed i loro quadrati; ora: « supponiamo che, tendendo r « ad 1, esistano due funzioni di t, $p(t)$ e $q(t)$, sommabili [2] insieme coi « loro quadrati nell'intervallo $(0, 2\pi)$, alle quali le $\alpha(r, t)$ e $\beta(r, t)$ con- « vergano in media rispettivamente. Sotto questa ipotesi, la $p(t) + iq(t)$, « che è funzione $u(z)$ dei punti z del piano x posti sulla circonferenza (1), « è tale che l'espressione

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{u(z) \, dz}{z - x} \, , \quad (x) < 1$$

« rappresenta la funzione $\varphi(x)$: l'indicazione $_{(1)}$ posta al piede del segno integrale significa « che l'integrazione va estesa alla circonferenza (1) ».

Anzitutto la (I) ha significato; infatti, riferendo l'integrazione alla variabile $t = -i \log z$ e separando le parti reali e le immaginarie, si ha una somma di quattro integrali, ciascuno dei quali contiene sotto il segno il prodotto di $p(t)$ o di $q(t)$ per una funzione limitata. Ora un simile pro-

[1] Lo stesso Fischer osserva (ibid., pag. 1149) che non è affatto necessario alla definizione che l'insieme delle funzioni considerate sia numerabile.

[2] La parola *sommabile* è usata nel senso definito dal Lebesgue. Ved. per esempio, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Ec. norm., ser. 3, tom. 27 (1910), pag. 373.

dotto, come è noto (¹), è sommabile: onde la (I) ha significato. Vogliamo mostrare come questa espressione, analoga alla formula di Cauchy, venga in qualche modo a sostituirla quale rappresentazione della $\varphi(x)$ quando questa non risulti definita sulla circonferenza (1); la dimostrazione, abbastanza semplice, può presentarsi come segue:

Fissiamo un punto x interno al cerchio (1); avremo

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{z^m}+\varrho_m(x\,,z),$$

dove il resto $\varrho_m(x\,,z)$ può, per m abbastanza grande ed indipendentemente dal valore di z in (1), essere reso in valore assoluto inferiore ad un numero positivo ε prefissato. Si può ora moltiplicare per $u(z)$ ed applicare il ricordato teorema del Lebesgue sul prodotto di una funzione sommabile per una funzione limitata; si avrà così

$$\text{(II)}\qquad \int_{(1)}\frac{u(z)\,dz}{z-x}=\sum_{n=0}^{m-1}x^n\int_{(1)}\frac{u(z)\,dz}{z^{n+1}}+\int_{(1)}u(z)\,\varrho_m(x\,,z)\,dz\,.$$

Posto

$$z=-i\log t\,,\quad e^{it}\,\varrho_m(x\,,z)=\lambda(t)+i\mu(t)\,,$$

per essere $|\varrho_m|<\varepsilon$, sarà pure $|\lambda|<\varepsilon$, $|\mu|<\varepsilon$. Ora l'ultimo integrale può scriversi

$$\int_0^{2\pi}(p+iq)\,(\lambda+i\mu)\,dt\,,$$

ed è la somma di quattro addendi i cui valori assoluti sono

$$\left|\int_0^{2\pi}p\lambda\,dt\right|\,,\quad \left|\int_0^{2\pi}p\mu\,dt\right|\,,\quad \left|\int_0^{2\pi}q\lambda\,dt\right|\,,\quad \left|\int_0^{2\pi}q\mu\,dt\right|\,;$$

per essere p e q sommabili insieme coi loro quadrati, e λ e μ limitate, è applicabile ad ognuno di questi integrali la disuguaglianza di Schwarz (²); così è

$$\left|\int_0^{2\pi}p\lambda\,dt\right|\leq\sqrt{\int_0^{2\pi}p^2\,dt}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi}\lambda^2\,dt}<\sqrt{2\pi}\,\varepsilon\sqrt{\int_0^{2\pi}p^2\,dt}\,,$$

ed analogamente per gli altri. L'ultimo integrale di (II) tende dunque a zero per m tendente all'infinito, e perciò si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}\frac{u(z)\,dz}{z-x}=\sum_{n=0}^{\infty}c'_n\,x^n\,,$$

(¹) Lebesgue, loc. cit., alla fine del § 13, pag. 374; ved. anche, dello stesso autore, *Sur les intégrales singulières*, § 4, A, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, ser. 3, tom. 1 (1910), pag. 35.

(²) Ved. Lebesgue, Memoria già citata, *Sur les intégrales singulières*, § 4, C, pag. 37.

sviluppo convergente entro il cerchio (1), e dove è

$$c'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{u(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

o, ponendo in evidenza l'argomento t,

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (p(t)\cos nt + q(t)\,\mathrm{sen}\,nt)\,dt + \\ + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} (q(t)\cos nt - p(t)\,\mathrm{sen}\,nt)\,dt\,.$$

La nostra proposizione sarà dimostrata se proveremo che c'_n è uguale al coefficiente di x^n nello sviluppo di $\varphi(x)$ in serie di potenze di x, coefficiente che è dato, essendo $r < 1$, da

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

o, posto come sopra

$$z = re^{it}\ ,\ \varphi(z) = \alpha(r\,,t) + i\beta(r\,,t)\,,$$

da

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} (\alpha(r\,,t)\cos nt + \beta(r\,,t)\,\mathrm{sen}\,nt)\,dt + \\ + \frac{i}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} (\beta(r\,,t)\cos nt - \alpha(r\,,t)\,\mathrm{sen}\,nt)\,dt\,.$$

Consideriamo due integrali omologhi in c'_n e c_n rispettivamente, per esempio

$$\int_0^{2\pi} p(t)\cos nt\,dt \quad \text{ed} \quad \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} \alpha(r\,,t)\cos nt\,dt\,,$$

e formiamo la differenza

$$\mathrm{D} = \int_0^{2\pi} (r^n p(t) - \alpha(r\,,t))\cos nt\,dt\,;$$

si ha:

$$\text{(III)} \qquad |\mathrm{D}| \leq (1 - r^n)\left|\int_0^{2\pi} p(t)\cos nt\,dt\right| + \\ + \left|\int_0^{2\pi} (p(t) - \alpha(r\,,t))\cos nt\,dt\right|.$$

Nel primo termine del secondo membro, è applicabile, per la ragione di prima (ved. nota [2] pag. 399) la disuguaglianza di Schwarz; posto dunque

$$\mathrm{P} = \int_0^{2\pi} p^2(t)\,dt\,,$$

l'integrale è minore, in valore assoluto, di $\sqrt{2\pi P}$: preso allora r_1 tale che sia $1 - r_1^n < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi P}}$, per ogni r compreso fra 1 ed r_1 il primo termine considerato sarà minore di $\dfrac{\varepsilon}{2}$. In quanto al secondo termine di (III), è ad esso applicabile, per la stessa ragione, la disuguaglianza di Schwarz, ed il suo quadrato è dunque minore o, al più, eguale a

$$\int_0^{2\pi} (p(t) - \alpha(r, t))^2 \, dt \int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt ;$$

ma, per la ammessa convergenza in media di $\alpha(r, t)$ a $p(t)$, si può determinare r_2 tale che, per r fra 1 ed r_2, sia

$$\int_0^{2\pi} (p(t) - \alpha(r, t))^2 \, dt < \frac{\varepsilon^2}{8\pi} ;$$

il secondo termine considerato è dunque minore di $\dfrac{\varepsilon}{2}$, e quindi, per r più prossimo ad 1 del maggiore dei due numeri r_1 ed r_2, è

$$|D| < \varepsilon .$$

Lo stesso si può ripetere per le altre tre parti corrispondenti in c_n e c'_n; questi differiscono dunque fra loro per tanto poco quanto si vuole, e quindi devono essere uguali. Onde è

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{u(z) \, dz}{z - x}$$

c. d. d.

L'espressione di $\varphi(x)$ mediante un integrale della forma (I) si può ottenere in modo anche più ovvio, se per $\varphi(x)$ si pongono condizioni più particolari quando x tende al contorno (circonferenza di raggio 1) (1). Così, se $\varphi(x) = \varphi(re^{it})$ ammette limite per $r = 1$ per ogni azimut, eccettuato, al più, quelli di un insieme di misura nulla, e se i valori $|\varphi(re^{it})|$ sono limitati uniformemente rispetto a t per $r < 1$, il limite di $\varphi(re^{it})$ per $r = 1$ si indichi con $f(t)$; sarà, per un teorema di Lebesgue (2),

$$\lim_{r=1} r \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{it}) \, e^{it} \, dt}{re^{it} - x} = \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \, e^{it} \, dt}{t - x} ,$$

e quindi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{f(z) \, dz}{z - x} ;$$

(1) Problemi affini a questo si trovano discussi nella bella Memoria di P. Fatou, Acta Math., tom. 30, pag. 335, 1906.

(2) *Leçons sur l'intégration*, pag. 114 (Paris, 1904).

ma la condizione di limitazione ora imposta a $|\varphi(re^{i\theta})|$ è infinitamente più restrittiva di quella della convergenza in media.

All'infuori di qualche maggiore complicazione nello sviluppo della dimostrazione, il teorema che forma oggetto della presente Nota si può estendere facilmente alla rappresentazione, mediante un integrale esteso al contorno, di una funzione analitica regolare data entro un'area semplicemente connessa, limitata da una linea analitica, per i punti della quale la funzione non è data: solo sapendosi che la parte reale e l'immaginaria della funzione stessa tendono in media a funzioni, integrabili insieme coi loro quadrati, dei punti del contorno, quando la variabile tende al contorno in dipendenza alla variazione di un opportuno parametro.

Chimica fisica. — *Potere rifrangente dell'acenoftene e delle idronaftaline.* Nota del Socio R. Nasini.

Chimica fisica. — *Pressione osmotica.* Nota del Socio R. Nasini.

Chimica fisica. — *Per la storia della spettrochimica. I concetti di I. H. Gladstone sul valore più elevato della rifrazione atomica del carbonio.* Nota del Socio R. Nasini.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica-matematica. — *Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica.* Nota II del Corrispondente R. Marcolongo.

Esporremo sommariamente alcune applicazioni dei risultati conseguiti nella precedente Nota [1].

a) Siano w, w′ le accelerazioni di due punti corrispondenti P, P', negli istanti t, t', dei due sistemi S, S'; cioè

$$\mathrm{w} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}, \quad \mathrm{w}' = \frac{d\mathrm{v}'}{dt'}.$$

[1] Questi Rendiconti, pag. 349.