ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

***pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1913.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. È noto che per qualunque superficie S applicabile sopra una quadrica Q il sistema coniugato permanente (u, v) (sistema coniugato comune alla superficie S ed alla quadrica Q) traccia sopra S un sistema *isotermo-coniugato*. Questa importante proprietà risultò la prima volta dalle ricerche di Darboux (1899), che posero in relazione le deformate S delle quadriche colle superficie isoterme (speciali) Σ. Essa segue dal fatto che ai sistemi ortogonali della superficie isoterma Σ corrispondono sopra S i sistemi coniugati, in particolare al sistema (isotermo) delle linee di curvatura di Σ il sistema coniugato permanente di S.

Dimostro in questa Nota che ai sistemi coniugati permanenti sulle deformate delle quadriche, appartiene un'altra singolare proprietà espressa dal teorema seguente:

A) *Sopra ogni deformata* S *di una quadrica* Q *le tangenti alle linee* $v = cost$, *o alle linee* $u = cost$, *del sistema coniugato permanente* (u, v), *formano una congruenza rettilinea della specie* W.

Possiamo anche esprimere questa proprietà sotto la forma equivalente:

A') *Ogni superficie* S *applicabile sopra una quadrica* Q *ammette (come superficie flessibile ed inestendibile) due deformazioni infinitesime*

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1913.

nelle quali i singoli punti si spostano secondo le binormali delle rispettive curve (v) *o* (u) *del sistema coniugato permanente.*

Se la quadrica Q è la sfera, reale od immaginaria, le superficie applicabili sopra Q sono quelle a curvatura costante, positiva o negativa, ed il sistema coniugato permanente è quello delle linee di curvatura. Come caso particolare del teorema A), si ha dunque l'altro:

In ogni superficie a curvatura costante le tangenti alle linee di curvatura dell'uno o dell'altro sistema formano una congruenza W,

o sotto la forma A'):

Ogni superficie a curvatura costante ammette due deformazioni infinitesime nelle quali i punti si spostano secondo le binormali delle linee di curvatura dell'uno o dell'altro sistema.

2. Per dimostrare il teorema A) mi servirò delle formole relative ai sistemi coniugati permanenti sulle deformate delle quadriche stabilite al Cap. VI, vol. III delle mie *Lezioni*, e per brevità mi riferirò ad uno solo dei casi ivi considerati, per es. a quello di una quadrica reale Q a punti ellittici.

Riferita la quadrica Q ad un qualunque suo sistema isotermo-coniugato (α, β), pei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ di Christoffel relativi al ds^2 di Q in coordinate (α, β) valgono le formole (8), pag. 249 (loc. cit.):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{ {11 \atop 1} \right\} = 2\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \alpha}, \quad \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{\partial \log L}{\partial \beta}, \quad \left\{ {22 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \alpha} \\ &\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \beta}, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{\partial \log L}{\partial \alpha}, \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = 2\frac{\partial \log L}{\partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \beta}, \end{aligned}\right.$$

dove L, H sono convenienti funzioni di α, β.

Sia ora S una qualunque deformata di Q ed (u, v) il loro sistema coniugato comune. Indicando con $\overline{\left\{ {ik \atop l} \right\}}$ i valori dei simboli di Christoffel calcolati per il ds^2 comune in coordinate (u, v), le formole (14), (14*), pag. 251 (log. cit.) ci dànno intanto

$$\overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}} = \frac{\partial}{\partial v}\log(L\lambda), \quad \overline{\left\{ {12 \atop 2} \right\}} = \frac{\partial}{\partial u}\log(L\mu).$$

In modo affatto simile, servendosi ancora delle equazioni del 2° ordine di Christoffel per l'equivalenza dei due ds^2 in coordinate (α, β) ed (u, v), si trovano i valori degli altri simboli, che scriviamo nel quadro seguente:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial u}\log(L^2\sqrt{H}\cdot\lambda)\,,\quad \overline{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\log(L\lambda)\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\overline{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\sqrt{H}}{\lambda}\right)\\ &\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\sqrt{H}}{\mu}\right)\,,\quad \overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial u}\log(L\mu)\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\overline{\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\log(L^2\sqrt{H}\cdot\mu)\,. \end{aligned}\right.$$

Dal calcolo eseguito al § 74 (loc. cit.) risulta che le tangenti alle linee $v=$ cost formeranno una *congruenza* W, se è soddisfatta la condizione ivi scritta sotto la (19), pag. 219. Ma, il sistema $(u\,,v)$ essendo qui isotermo-coniugato, si ha $D = D''$, e la citata formola diventa

$$(a)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left[\overline{\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}} - \overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}\right];$$

ora questa condizione è effettivamente soddisfatta per le (2). Così pure sussiste l'altra

$$(b)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\overline{\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}} - \overline{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}\right],$$

la quale esprime che le tangenti alle $u=$ cost formano una congruenza W.

Il nostro teorema A) è così dimostrato ([1]).

3. Sia S una deformata della quadrica Q ed $(u\,,v)$ il suo sistema coniugato permanente. Se tiriamo le tangenti, per es. alle linee $v=$ cost, queste formano, per qnanto si è visto, una congruenza W di cui S è la prima falda focale. Se indichiamo con $\overline{S}$ la seconda falda, e riguardiamo come punti corrispondenti sopra $S\,,\overline{S}$ i due fuochi di un medesimo raggio, questa corrispondenza conserva i sistemi coniugati (le linee asintotiche).

([1]) Si può ancora osservare che le relazioni caratteristiche (a), (b) del testo sono pure soddisfatte dai simboli (1) di Christoffel relativi alla quadrica Q, riferita ad un qualunque sistema isotermo-coniugato $(\alpha\,,\beta)$. Così le tangenti alle linee di un sistema isotermo-coniugato di Q formano una congruenza W; e viceversa:

Tutte le congruenze W *aventi per una falda focale la quadrica* Q *si ottengono tirando le tangenti alle linee di* (*qualunque*) *sistema isotermo-coniugato sopra* Q.

Siccome di qualunque quadrica sono noti tutti i sistemi isotermo-coniugati, così il problema delle deformazioni infinitesime per una quadrica si risolve per quadrature (Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 232).

Supponiamo ora di applicare alla S una qualunque delle ∞^2 trasformazioni B_k per congruenze W, che la cangi in un'altra deformata S_1 della medesima quadrica Q. Si sa che sulle due falde focali (S, S_1) della congruenza, formata dalle congiungenti i punti corrispondenti di S, S_1, si corrispondono i sistemi coniugati, ed in particolare al *sistema* coniugato permanente (u, v) sopra S corrisponde il sistema analogo (u, v) sopra S_1 (vedi vol. III, § 34). Ne segue che le tangenti alle linee $v = \text{cost}$ sopra S_1 formano, alla loro volta, una nuova congruenza W, la cui seconda falda, che indicheremo con $\overline{S}_1$, dipende da S_1 come $\overline{S}$ da S. Ora fra i punti $\overline{M}, \overline{M}_1$ di $\overline{S}, \overline{S}_1$ viene, dalla costruzione stessa, stabilita una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati, e noi vogliamo dimostrare che sussiste ulteriormente il teorema:

B) *Le due seconde falde* $\overline{S}, \overline{S}_1$ *sono nuovamente le due falde focali della congruenza rettilinea* W *formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti.*

In altri termini, le quattro superficie

$$(S, S_1, \overline{S}_1, \overline{S})$$

formano una quaderna del generale teorema di permutabilità dimostrato al § 248, vol. II delle *Lezioni*.

Proveremo il teorema B) dimostrando che la congiungente $\overline{M}\,\overline{M}_1$ giace nel piano tangente in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$; come pure nel piano tangente in $\overline{M}_1$ alla $\overline{S}_1$. Ma, a causa della simmetria nella costruzione, basterà verificare la prima cosa.

Qui ci limiteremo a stabilire la proprietà enunciata quando la quadrica Q è un paraboloide, ovvero una sfera immaginaria, poichè in questi casi possediamo già sviluppate le necessarie formole per le trasformazioni B_k riferite ai sistemi coniugati permanenti. Per il caso delle altre quadriche a centro converrebbe dedurle col metodo tenuto dal Calapso nelle sue recenti ed interessanti ricerche (¹).

4. Riferiamoci per es. al caso delle deformate S del paraboloide ellittico ed alle formole sviluppate per le loro trasformazioni nella mia Memoria del tomo XII (1906) degli Annali, che qui citerò con (M).

(¹) *Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.* Annali di matematica, tomo XIX (1912). In questa Memoria il Calapso ha attuato lo studio delle trasformazioni B_k come trasformazioni intrinseche dei sistemi coniugati permanenti, nel senso indicato al § 79, vol. III delle *Lezioni*. Un risultato principale di queste ricerche è la risoluzione delle trasformazioni date da Guichard nei loro elementi, che sono in effetto le trasformazioni B_k, combinate fra loro e colla così detta trasformazione H. Particolarmente notevole in questi studî del Calapso è l'ufficio che viene a compiere la trasformazione *singolare* B_∞, corrispondente al circolo immaginario all'infinito come conica focale.

La superficie S, riferita al suo sistema coniugato permanente (u, v), sia definita dalle formole § 5 (M), e la sua trasformata S_1 da quelle al § 14, in particolare dalle (50) loc. cit.:

$$S_1)\qquad x_1 = x - \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Per le seconde falde focali $\overline{S}, \overline{S}_1$ delle congruenze formate dalle tangenti alle linee $v = \text{cost}$ sulle S, S_1, avremo (cfr. vol. III, pag. 218)

$$\begin{aligned} \overline{S})\quad & \overline{x} = x + l\,\frac{\partial x}{\partial u} \\ \overline{S}_1)\quad & \overline{x}_1 = x_1 + l_1\,\frac{\partial x_1}{\partial u}, \end{aligned}$$

dove i valori di l, l_1 saranno dati da

$$\frac{1}{l} = -\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}, \qquad \frac{1}{l_1} = -\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}_1,$$

e quindi, per le formole (47), § 13 (M)

$$l = -\frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial u}}, \qquad l_1 = -\frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}.$$

Conseguentemente avremo

$$\overline{x}_1 - \overline{x} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial u}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}\frac{\partial x_1}{\partial u},$$

formola che scriviamo anche

$$(3)\qquad \overline{x}_1 - \overline{x} = a\,\frac{\partial x}{\partial u} + b\,\frac{\partial x}{\partial v} + cX.$$

I valori dei coefficienti a, b, c si trovano subito ricorrendo alle (51), § 14 (M):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = L\,\frac{\partial x}{\partial u} + M\,\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{pq}}{k\sqrt{H}}\,\mu\lambda_1 \cdot X;$$

in particolare abbiamo

$$b = -\frac{\mu_1}{k\mu} - \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}\,M$$

$$c = \frac{\sqrt{pq}}{k\sqrt{H}}\,\mu\lambda_1 \cdot \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}.$$

Sostituendo per M il suo effettivo valore dato nelle (49*), § 14 (M), risulta così:

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
b &= -\frac{\mu_1}{k\mu} - \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}\frac{\lambda_1}{k\mu}\left[\mathrm{A} - \frac{p\beta \operatorname{sen}\omega + q\alpha\cos\omega}{\mathrm{H}}\lambda\right]\\
c &= \frac{\sqrt{pq}}{k\sqrt{\mathrm{H}}}\mu\lambda_1 \cdot \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}}.
\end{aligned}
\right.
$$

D'altra parte, derivando rapporto ad u, v le formole

$$
\overline{x} = x + l\frac{\partial x}{\partial u},
$$

risulta (cfr. vol. III, pag. 218):

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= \mathrm{R}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D}l\mathrm{X}\\
\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= \mathrm{T}\frac{\partial x}{\partial u},
\end{aligned}
\right.
$$

dove basterà conoscere il valore del coefficiente S dato dalla formola (ibid.)

$$
(6)\qquad \mathrm{S} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} l.
$$

Dobbiamo ora verificare (n. 3) che la congiungente $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}_1$ giace nel piano tangente in $\overline{\mathrm{M}}$ alla $\overline{\mathrm{S}}$, cioè che si annulla il determinante

$$
\begin{vmatrix}
\overline{x}_1 - \overline{x}, & \overline{y}_1 - \overline{y}, & \overline{z}_1 - \overline{z}\\
\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial u}, & \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial u}, & \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial u}\\
\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial v}, & \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial v}, & \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial v}
\end{vmatrix}.
$$

A causa delle (3), (5), ciò equivale all'annullarsi del determinante

$$
\begin{vmatrix}
a & b & c\\
\mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{D}l\\
\mathrm{T} & 0 & 0
\end{vmatrix},
$$

cioè alla condizione

$$
c\mathrm{S} - b\mathrm{D}l = 0,
$$

ovvero per la (6)

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} c - \mathrm{D}l = 0 . \tag{7}$$

Ricordando che si ha (M, § 5 e § 13)

$$\mathrm{D} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}} \lambda\mu$$

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{p\beta \operatorname{sen}\omega + q\alpha\cos\omega}{\mathrm{H}}\frac{\lambda^2}{\mu} ,$$

e sostituendo nella (7) questi valori ed i valori (4) per b, c, resta da verificare la formola

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial u} + \left(\mathrm{A} - \frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\lambda_1 = 0 .$$

Ora si ha (M, § 5)

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial u} = \lambda_1 \frac{\partial\theta}{\partial v} ,$$

talchè la precedente si riduce all'altra

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v} = \mathrm{A} ,$$

che combina precisamente con la formola di trasformazione (27) (M, § 8), avendo A il valore (28).

Così, per il caso delle deformate dei paraboloidi, il teorema B) è dimostrato.

5. Veniamo da ultimo al caso di due superficie pseudosferiche S, S_1 (di raggio $\mathrm{R} = 1$), trasformate l'una dell'altra per una trasformazione B_σ di Bäcklund, secondo le formole al § 373 segg. del vol. II delle *Lezioni*. Supponiamo che S_1 sia data dalle formole

$$x_1 = x + \cos\sigma(\cos\theta_1 \mathrm{X}_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \mathrm{X}_2) ,$$

dove θ_1 è legata a θ dalle formole di trasformazione di Bäcklund

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\theta_1}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\sigma} \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Se tiriamo le tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost}$ della S, la seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza rettilinea W così formata è data dalle formole

$$\overline{x} = x - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}} X_1 .$$

I coseni di direzione $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}$ sono proporzionali al binomio

$$\operatorname{sen}\theta X_2 + \frac{\partial\theta}{\partial v} X_3$$

e ai due analoghi, sicchè possiamo scrivere

$$\overline{X} = \operatorname{sen}\theta X_2 + \frac{\partial\theta}{\partial v} X_3 . \tag{9}$$

Medesimamente, se costruiamo la congruenza delle tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost}$ sulla S_1, per la sua seconda falda $\overline{S}_1$ avremo

$$\overline{x}_1 = x_1 - \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\frac{\partial\theta_1}{\partial u}} X_1^{(1)} ,$$

dove il valore di $X_1^{(1)}$ è dato da

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} = {} & (\cos\theta\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1) X_1 + \\ & + (\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1) X_2 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta X_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

Da queste formole deduciamo

$$\overline{x}_1 - \overline{x} = \cos\sigma(\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}} X_1 - \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\frac{\partial\theta_1}{\partial u}} X_1^{(1)} , \tag{11}$$

e verifichiamo che si ha identicamente

$$\Sigma\overline{X}(\overline{x}_1 - \overline{x}) = 0 , \tag{12}$$

ciò che proverà il teorema B) n. 3 per questo caso.

Ora dalle (9), (10) segue

$$\Sigma\overline{X} X_1 = 0 \ , \ \Sigma\overline{X} X_2 = \operatorname{sen}\theta ,$$

$$\Sigma\overline{X} X_1^{(1)} = \operatorname{sen}\theta(\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1) - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} ,$$

e per le (11) la (12) si converte nell'altra

$$\cos\sigma\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = \cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 ,$$

la quale coincide appunto con la prima delle formole (8) per la trasformazione di Bäcklund.