ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

ma la condizione di limitazione ora imposta a $|\varphi(re^{it})|$ è infinitamente più restrittiva di quella della convergenza in media.

All'infuori di qualche maggiore complicazione nello sviluppo della dimostrazione, il teorema che forma oggetto della presente Nota si può estendere facilmente alla rappresentazione, mediante un integrale esteso al contorno, di una funzione analitica regolare data entro un'area semplicemente connessa, limitata da una linea analitica, per i punti della quale la funzione non è data: solo sapendosi che la parte reale e l'immaginaria della funzione stessa tendono in media a funzioni, integrabili insieme coi loro quadrati, dei punti del contorno, quando la variabile tende al contorno in dipendenza alla variazione di un opportuno parametro.

Chimica fisica. — *Potere rifrangente dell'acenoftene e delle idronaftaline.* Nota del Socio R. NASINI.

Chimica fisica. — *Pressione osmotica.* Nota del Socio R. NASINI.

Chimica fisica. — *Per la storia della spettrochimica. I concetti di I. H. Gladstone sul valore più elevato della rifrazione atomica del carbonio.* Nota del Socio R. NASINI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica-matematica. — *Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica.* Nota II del Corrispondente R. MARCOLONGO.

Esporremo sommariamente alcune applicazioni dei risultati conseguiti nella precedente Nota [1].

a) Siano w, w′ le accelerazioni di due punti corrispondenti P, P', negli istanti t, t', dei due sistemi S, S'; cioè

$$\mathrm{w} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\ ,\quad \mathrm{w}' = \frac{d\mathrm{v}'}{dt'}\ .$$

[1] Questi Rendiconti, pag. 349.

Osservando che dalla (1′) del § 1 [1] si trae

$$\frac{dt}{dt'} = m - \mathrm{v}' \times \mathrm{a} = n',$$

dalla (1) del § 2 otteniamo

$$\mathrm{w}' = \frac{1}{n} \frac{(m + \mathrm{v} \times \mathrm{b})\, \alpha \mathrm{w} - (\alpha \mathrm{v} + \mathrm{a})\, \mathrm{b} \times \mathrm{w}}{(m + \mathrm{v} \times \mathrm{b})^2},$$

ossia

$$\mathrm{w}' = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\, \alpha \mathrm{w} - n\mathrm{v}' . \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{w}}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \{\alpha - \mathrm{H}(\mathrm{b}\,, \mathrm{v}')\}\, \mathrm{w}\,.$$

Quindi, in ultimo,

(1) $$\mathrm{w}' = \frac{1}{n^2} \mathrm{K}\gamma' \mathrm{w}\,;$$

e da questa, inversamente, si ha

(1′) $$\mathrm{w} = \frac{1}{n'^2} \mathrm{K}\gamma \mathrm{w}'.$$

b) Poniamo

(2) $$\mathrm{w}_1 = \frac{d}{dt} \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2}} = \frac{(1 - \mathrm{v}^2)\, \mathrm{w} + \mathrm{v} \times \mathrm{w} . \mathrm{v}}{(1 - \mathrm{v}^2)^{3/2}}$$

(2′) $$\mathrm{w}_1' = \frac{d}{dt'} \frac{\mathrm{v}'}{\sqrt{1 - \mathrm{v}'^2}} = \frac{(1 - \mathrm{v}'^2)\, \mathrm{w}' + \mathrm{v}' \times \mathrm{w}' . \mathrm{v}'}{(1 - \mathrm{v}'^2)^{3/2}}\,;$$

vogliamo dimostrare che

(3) $$\mathrm{w}_1' = \mathrm{KR}\gamma' \mathrm{w}_1 \quad , \quad \mathrm{w}_1 = \mathrm{KR}\gamma \mathrm{w}_1'.$$

Infatti si ha:

$$1 - \mathrm{v}'^2 = n'^2 (1 - \mathrm{v}^2)$$

$$(1 - \mathrm{v}'^2)\, \mathrm{w}' = n'^4 (1 - \mathrm{v}^2)\, \mathrm{K}\gamma' \mathrm{w} = n'^4 (1 - \mathrm{v}^2)\, (\alpha \mathrm{w} - \mathrm{b} \times \mathrm{w} . \mathrm{v}')$$

$$\mathrm{v}' \times \mathrm{w}' = n'^2\, \mathrm{v}' \times \mathrm{K}\gamma' \mathrm{w} \qquad = n'^2\, \mathrm{w} \times \gamma' \mathrm{v}' = n'^2\, \mathrm{w} \times (\mathrm{K}\alpha \mathrm{v}' - \mathrm{v}'^2 . \mathrm{b}),$$

e quest' ultima, per la (3) del § 2, si trasforma in

$$\mathrm{v}' \times \mathrm{w}' = n'^2\, \mathrm{w} \times \{n' \mathrm{v} + n'^2 (1 - \mathrm{v}^2)\, \mathrm{b}\}.$$

Quindi il numeratore della (2′) diventa

$$n'^4 (1 - \mathrm{v}^2)\, \alpha \mathrm{w} + n'^3\, \mathrm{v} \times \mathrm{w} . \mathrm{v}' = n'^4 \{(1 - \mathrm{v}^2)\, \alpha \mathrm{w} + \mathrm{v} \times \mathrm{w}\, (\alpha \mathrm{v} + \mathrm{a})\},$$

ossia

$$n'^4 \{(1 - \mathrm{v}^2)\, (\alpha \mathrm{w} + \mathrm{v} \times \mathrm{w} . \mathrm{a}) + \mathrm{v} \times \mathrm{w}\, (\alpha \mathrm{v} + \mathrm{v}^2 . \mathrm{a})\}$$
$$= n'^4 . \gamma\, \{(1 - \mathrm{v}^2)\, \mathrm{w} + \mathrm{v} \times \mathrm{w} . \mathrm{v}\}\,;$$

[1] I paragrafi 1 e 2 si riferiscono alla Nota precedente.

e però sarà
$$\mathrm{w}_1' = n' \,.\, \gamma \mathrm{w}_1 \,;$$

e questa, per la (12) del § 2, equivale alla prima delle (3).

Operando su questa con $\mathrm{KR}\gamma$, si ricava la seconda delle (3).

c) Diciamo dP_0 lo spostamento infinitesimo di P calcolato per t=cost.; e dP_0' quello del punto corrispondente P' calcolato per t'=cost.

Dico che

$$dP_0' = \mathrm{K}\gamma' dP_0 \quad , \quad dP_0 = \mathrm{K}\gamma dP_0' \,. \tag{4}$$

Infatti:

$$dP = dP_0 + \mathrm{v}dt \,; \tag{5}$$

e per le (1) del § 1, si ha:

$$dP_0' = \alpha dP + \mathrm{a}\,dt \tag{6}$$

$$0 = \mathrm{b} \times dP + m\,dt \,. \tag{7}$$

Eliminiamo dt tra (5) e (7); otteniamo

$$dP = dP_0 - \frac{\mathrm{b} \times dP}{m}\,\mathrm{v}\,.$$

Moltiplicando scalarmente per b, si ricava

$$\frac{1}{m}\,\mathrm{b} \times dP(m + \mathrm{v} \times \mathrm{b}) = \mathrm{b} \times dP_0 \,,$$

ossia

$$-\,dt = \frac{1}{m}\,\mathrm{b} \times dP = n'\mathrm{b} \times dP_0 \,.$$

Eliminiamo invece dP fra (5) e (6); tenendo presente l'ultima relazione e le (3) e (4) del § 2, si ha

$$dP_0' = \alpha\,dP_0 + n\mathrm{v}'dt = \}\alpha - \mathrm{H}(\mathrm{b}\,,\,\mathrm{v}')\{\, dP_0 \,,$$

che dimostra la prima delle (4).

Indicando infine con $d\tau$ e $d\tau'$ gli elementi di volume di S e di S' rispettivamente calcolati per t = cost., e t' = cost., si ha:

$$d\tau' = \mathrm{I}_3 \mathrm{K}\gamma' \,.\, d\tau = \mathrm{I}_3\,\gamma' \,.\, d\tau = n' d\tau \,.$$

Se poi, in particolare, v e v' hanno il significato loro attribuito nel § 1, osservando che in tal caso n' ha il valore ϱ/ϱ', dall'ultima relazione si deduce

$$\varrho' d\tau' = \varrho\, d\tau \,;$$

oppure, essendo $dt = n'dt'$,

$$d\tau' \,.\, dt' = d\tau \,.\, dt \,,$$

le quali hanno interpretazioni note.

d) Vogliamo ora occuparci della trasformazione della forza elettromagnetica di Lorentz, espressa in S (poichè c, velocità della luce, è eguale ad uno), per unità di volume, da

(8) $$\mathrm{F} = \varrho(\mathrm{e} + \mathrm{v} \wedge \mathrm{m}),$$

ed in S' da

(8') $$\mathrm{F}' = \varrho'(\mathrm{e}' + \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}').$$

Dimostreremo che

(9) $$\mathrm{F}' = \gamma \mathrm{F} \quad , \quad \mathrm{F} = \gamma' \mathrm{F}'.$$

Cominciamo infatti a calcolare

$$\alpha \mathrm{F} = \varrho \,.\, \alpha \mathrm{e} + \varrho \,.\, \alpha(\mathrm{v} \wedge \mathrm{m}).$$

Per le formule del § 1, si ha, sviluppando i prodotti,

$$\varrho \,.\, \alpha \mathrm{e} = \varrho'(m^2 \mathrm{e}' - m \mathrm{v}' \times \mathrm{a} \,.\, \mathrm{e}' + m \mathrm{a} \wedge \mathrm{m}' - \mathrm{v}' \times \mathrm{a} \,.\, \mathrm{a} \wedge \mathrm{m}').$$

Osserviamo, poscia, che mutando α in $\mathrm{R}\alpha$ nella

$$\mathrm{R}\alpha(\mathrm{v} \wedge \mathrm{m}) = (\alpha \mathrm{v}) \wedge \alpha \mathrm{m},$$

si ha (I, pag. 40 [5])

$$m\alpha(\mathrm{v} \wedge \mathrm{m}) = (\mathrm{R}\alpha \mathrm{v}) \wedge \mathrm{R}\alpha \mathrm{m};$$

quindi per la (13') e (14') del § 1 otterremo:

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, \alpha(\mathrm{v} \wedge \mathrm{m}) = \varrho' \} & m^2 \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}' - m \mathrm{v}' \wedge (\mathrm{a} \wedge \mathrm{e}') \\ & - \mathrm{a} \times \mathrm{m}' \,.\, \mathrm{v}' \wedge \mathrm{a} - m \mathrm{a} \wedge \mathrm{m}' + \mathrm{a} \wedge (\mathrm{a} \wedge \mathrm{e}') \{ . \end{aligned}$$

Sviluppando i doppî prodotti vettoriali, risulta

$$\alpha \mathrm{F} = \varrho'(\mathrm{e}' + m^2 \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}' - m \mathrm{v}' \times \mathrm{e}' \,.\, \mathrm{a} + \mathrm{a} \times \mathrm{e}' \,.\, \mathrm{a} + \mathrm{w})$$

in cui si è posto

$$\mathrm{w} = \mathrm{a} \times \mathrm{v}' \,.\, \mathrm{m}' \wedge \mathrm{a} + \mathrm{a} \times \mathrm{m}' \,.\, \mathrm{a} \wedge \mathrm{v}';$$

e questa, per una nota identità (II, pag. 131, [8']), si trasforma in

$$\mathrm{w} = \mathrm{a} \times \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}' \,.\, \mathrm{a} - \mathrm{a}^2 \,.\, \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}'.$$

Poscia ricordiamo che

$$\mathrm{a} \times \mathrm{e}' = \mathrm{b} \times \mathrm{e};$$

quindi

$$\alpha \mathrm{F} = \varrho'(\mathrm{e}' + \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}') + \varrho'(\mathrm{a} \times \mathrm{v}' \wedge \mathrm{m}' \,.\, \mathrm{a} - m \mathrm{v}' \times \mathrm{e}' + \mathrm{e} \times \mathrm{b})\, \mathrm{a}.$$

La seconda parte del secondo membro può scriversi

$$\begin{aligned} \varrho' \} \mathrm{e} \times \mathrm{b} - \mathrm{v}' \times (m \mathrm{e}' - \mathrm{a} \wedge \mathrm{m}') \{ \, \mathrm{a} &= \varrho'(\mathrm{e} \times \mathrm{b} - \mathrm{v}' \times \alpha \mathrm{e})\, \mathrm{a} \\ &= \varrho'(\mathrm{b} - \mathrm{K}\alpha \mathrm{v}') \times \mathrm{e} \,.\, \mathrm{a} = - \varrho \mathrm{v} \times \mathrm{e} \,.\, \mathrm{a}; \end{aligned}$$

e poichè, finalmente, da (8) si deduce

$$F \times v = \varrho v \times e\,,$$

otteniamo

$$\alpha F = F' - F \times v \,.\, a\,,$$

da cui

$$F' = \{\alpha + H(v\,,a)\}\, F = \gamma F$$

che è precisamente la prima delle (9); applicando a questa l'operatore γ', si deduce la seconda.

Per una osservazione fatta al § 2, dedurremo subito le altre relazioni

$$F' \times v' = \quad F \times b + mF \times v \tag{10}$$

$$F \times v = - F' \times a + mF' \times v'. \tag{10'}$$

Diciamo ora F_1, F'_1 le forze elettromagnetiche per unità di carica in S e in S'; varranno le formule:

$$F'_1 = KR\gamma' F_1 \quad , \quad F_1 = KR\gamma F'_1\,. \tag{11}$$

Infatti si ha

$$F = \varrho F_1 \quad , \quad F' = \varrho' F'_1\,;$$

quindi la (9) ci dà

$$\varrho' F'_1 = \varrho \,.\, \gamma F_1\,;$$

ossia, tenendo presente il valore attuale $\frac{\varrho}{\varrho'}$ di n', e la seconda delle (12) del § 2, risulterà la prima delle (11) e, quindi, anche la seconda [1].

Si noterà l'analogia delle (11) colle (3).

e) Consideriamo, nella elettrodinamica di Minkowski, il vettore s_1, corrente di conduzione, la forza elettrica E_1 e la forza magnetica m_1 di riposo, definiti in S dalle

$$s_1 = s - \varrho v \tag{12}$$

$$E_1 = \frac{E + v \wedge M}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{13}$$

$$m_1 = \frac{m - v \wedge e}{\sqrt{1 - v^2}}\,. \tag{14}$$

[1] Sullo stesso argomento vedi: W. von Ignatowsky, *Das Relativitätsprinzip* (Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, Bd. 17, 1-24; Bd. 18, 17-40 (1911): § 12), in cui vengono sempre considerate le trasformazioni L particolari; A. Sommerfeld, *Zur Relativitätstheorie. I Vierdimensionale Vektoralgebra* (Annalen der Physik, IV Folge, Bd. 32 (1910), 749-776, § 4).

Dimostriamo che in S' sarà

$$\text{(15)} \qquad s'_1 = K\gamma' s_1$$

$$\text{(16)} \qquad E'_1 = \gamma E_1 \quad , \quad m'_1 = \gamma m_1 \,.$$

Infatti si ha:

$$s'_1 = s' - \varrho' v' = \alpha s + \varrho a - (s \times b + \varrho m)\, v'$$

per le (16) e (17) del § 1. Eliminando s colla (12), otteniamo

$$s'_1 = \alpha s_1 + \varrho(\alpha v + a) - s_1 \times b . v' - \varrho(v \times b + m)\, v' ;$$

il coefficiente di ϱ, per le (2) e (3) del § 2, è nullo: quindi

$$s'_1 = \{\alpha - H(b\,,\, v')\}\, s_1 = K\gamma' s_1$$

che dimostra la (15).

Poichè E', M' si esprimono mediante E, M allo stesso modo che e', m' mediante e, m, il numeratore del secondo membro di (13) si trasforma come F_1 della formula (11); quindi

$$E'_1 = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{1 - v'^2}}\, KR\gamma' E_1 = n . KR\gamma' E_1 = nn' . \gamma E_1 = \gamma E_1$$

in virtù delle (6), (12), (4) del § 2.

Lo stesso procedimento vale per la seconda delle (16).

Dalle formule ottenute si deducono subito queste altre:

$$\text{(17)} \qquad E'_1 \times s'_1 = E_1 \times s_1 \quad , \quad m'_1 \times s'_1 = m_1 \times s_1 \,.$$

Infatti

$$E'_1 \times s'_1 = \gamma E_1 \times K\gamma' s_1 = \gamma' \gamma E_1 \times s_1 = E_1 \times s_1$$

per la (8) del § 2; ecc.

Il primo di questi due invarianti ha un notevole significato fisico; riducendo infatti il sistema S' al riposo, facendo cioè $v' = 0$, si ha

$$s'_1 = s' = \sigma E' \quad , \quad E'_1 = E' \,; \qquad (\sigma \text{ costante})$$

il primo membro della prima delle (17) si riduce quindi a $\sigma E'^2$, che esprime il calore di Joule per unità di volume e di tempo.

Se finalmente poniamo

$$\text{(18)} \qquad N = \varrho E + s \wedge m \,,$$

sarà facile provare che sussisteranno le formule:

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} N' = \alpha N + s \times E . a \\ s' \times E' = N \times b + m s \times E \,. \end{cases}$$

Sarà quindi pur vera la

$$\mathrm{N}'^2 - (\mathrm{s}' \times \mathrm{E}')^2 = \mathrm{N}^2 - (\mathrm{s} \times \mathrm{E})^2 .$$

Si può assegnare una notevole espressione del vettore $\mathbf{N}$, considerando (II, pag. 104, [5]) l'omografia β delle tensioni relative, la quale, colle notazioni di Minkowski, ha la forma:

$$\beta = \mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{m}) + \mathrm{H}(\mathrm{e}, \mathrm{E}) - \tfrac{1}{2}(\mathrm{m} \times \mathrm{M} + \mathrm{e} \times \mathrm{E}), \tag{20}$$

oppure, per la (23), usufruendo dell'operatore C,

$$-\mathrm{C}\beta = \mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{m}) + \mathrm{H}(\mathrm{e}, \mathrm{E}).$$

In virtù delle equazioni dell'elettrodinamica di Minkowski, si trova subito

$$\mathbf{N} = \operatorname{grad} \beta - \frac{\partial (\mathrm{e} \wedge \mathrm{M})}{\partial t} - \mathbf{N}_1 , \tag{21}$$

dove

$$2\mathbf{N}_1 = \mathrm{K} \frac{d\mathrm{m}}{dP} \mathrm{M} - \mathrm{K} \frac{d\mathrm{M}}{dP} \mathrm{m} + \mathrm{K} \frac{d\mathrm{E}}{dP} \mathrm{e} - \mathrm{K} \frac{d\mathrm{e}}{dP} \mathrm{E} . \tag{22}$$

Inoltre, se per compendio si pone

$$-2l = \mathrm{m} \times \mathrm{M} + \mathrm{e} \times \mathrm{E} ,$$

si deduce

$$\mathrm{I}_1 \beta = l ; \tag{23}$$

poscia, notando che (II, pag. 136, [12])

$$\mathrm{I}_2(\beta - l) = \mathrm{I}_2 \{\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{m}) + \mathrm{H}(\mathrm{e}, \mathrm{E})\} = (\mathrm{M} \wedge \mathrm{e}) \times (\mathrm{m} \wedge \mathrm{E}) ,$$

cioè

$$\mathrm{I}_2 \beta + l^2 = \mathrm{M} \times \mathrm{m} . \mathrm{e} \times \mathrm{E} - \mathrm{M} \times \mathrm{E} . \mathrm{m} \times \mathrm{e} ,$$

si trae:

$$-\mathrm{I}_2 \beta = \mathfrak{L}^2 + \mathrm{M} \times \mathrm{E} . \mathrm{m} \times \mathrm{e} , \tag{24}$$

essendo $\mathfrak{L}$ la funzione di Lagrange. Sicchè, per quanto fu osservato al § 1, $\mathrm{I}_2 \beta$ è un invariante per una trasformazione L; di più il secondo membro di (24) è sempre positivo.

Infine, sempre dalla (20), si trae pure

$$\mathrm{I}_3(\beta - l) = \mathrm{I}_3 \beta - l\, \mathrm{I}_2 \beta + l^2 \mathrm{I}_1 \beta - l^3 = 0 ,$$

cioè

$$\mathrm{I}_3 \beta = \mathrm{I}_1 \beta . \mathrm{I}_2 \beta . \tag{25}$$

La formula (21) è una generalizzazione di altra ben nota (II, pag. 97, [8]). Il vettore $\mathbf{N}_1$ (espresso sotto forma completamente assoluta) corrisponde al vettore di componenti $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ della nota Memoria di Minkowski (§§ 13 e 14); e infine il secondo membro di (24) è la radice quadrata del determinante della matrice S (§ 13 della stessa Memoria), che viene così ad essere espressa, in modo semplicissimo, mediante il secondo invariante dell'omografia delle tensioni relative.