ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulle espressioni lineari integro-differenziali.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

1. Le espressioni della forma:

$$\sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x) + \int_0^x \sum_0^n b_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds \tag{1}$$

$$\sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x) + \int_0^1 \sum_0^p c_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds \tag{2}$$

$$\sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x) + \int_0^x \sum_0^n b_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds + \int_0^1 \sum_0^p c_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds \tag{3}$$

saranno dette rispettivamente espressioni lineari integro-differenziali di tipo VOLTERRA, FREDHOLM e MISTO, e di primo, secondo o terzo genere, secondo che $m \gtreqless n\,,p$.

Occupiamoci anzitutto di (1) e (2).

2. Cominciamo dalle espressioni di primo genere; poniamo

$$\psi^{(m)}(x) = \varphi(x)\,.$$

Da note formule risulta che:

$$\psi^{(m-\mu)}(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx^\mu = \int_0^x \frac{(x-s)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \mathrm{P}_\mu(x)\,,$$

ove P_μ è un polinomio di grado $\mu-1$, ed è $\mathrm{P}'_\mu = \mathrm{P}_{\mu-1}$; dunque la (1) e la (2) possono scriversi, senz'altro, rispettivamente:

$$\left\{\begin{aligned} &a_m(x)\,\varphi(x) + \sum_1^m \int_0^x a_{m-r}(x)\cdot\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \\ &+ \sum_{m-n}^m \int_0^x dt\, b_{m-r}(xt) \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \sum_0^m a_\mu(x)\,\mathrm{P}_{m-\mu}(x) + \\ &\qquad + \sum_{m-n}^m \int_0^x b_\mu(xs)\,\mathrm{P}_{m-\mu}(s)\,ds \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &a_m(x)\,\varphi(x) + \sum_1^m \int_0^x a_{m-r}(x)\cdot\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \\ &+ \sum_{m-p}^m \int_0^1 dt\, c_{m-r}(xt) \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \sum_0^m a_\mu(x)\,\mathrm{P}_{m-\mu}(x) + \\ &\qquad + \sum_{m-n}^m \int_0^1 c_\mu(xs)\,\mathrm{P}_{m-\mu}(s)\,ds\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1913.

Invertendo con la regola di Dirichlet le integrazioni doppie delle (4) e (5), si vede che si ha:

$$(6)\quad \begin{cases} a_m(x)\,\varphi(x) + \sum_1^m \int_0^x a_{m-r}(x)\,\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \\ \qquad + \sum_{m-n}^m \int_0^x \varphi(s)\,ds \cdot \int_s^x b_{m-r}(xt)\cdot\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt + \mathrm{Q}(x) \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} a_m(x)\,\varphi(x) + \sum_1^m \int_0^x a_{m-r}(x)\,\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds + \\ \qquad + \sum_{m-p}^m \int_0^1 \varphi(s)\,ds \int_s^1 c_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt + \mathrm{Q}_1(x)\,, \end{cases}$$

ove Q e Q_1 dipendono in modo evidente solo dalle P, a, b, c. È facile vedere che la determinazione delle P è data dalle condizioni iniziali o « al CONTORNO ». Perciò la (6) e (7) si possono porre rispettivamente sotto la forma:

$$(8)\qquad a_m(x)\,\varphi(x) + \int_0^x \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds + \mathrm{Q}(x)$$

$$(9)\qquad a_m(x)\,\varphi(x) + \int_0^x \mathrm{N}_1(xs)\,\varphi(s)\,ds + \int_0^1 \mathrm{N}_2(xs)\,\varphi(s)\,ds + \mathrm{Q}_1(x)\,,$$

ove si ponga

$$\mathrm{N}(xs) = \sum_1^m \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,a_{m-r}(x) + \sum_{m-n}^m \int_s^x b_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt$$

$$\mathrm{N}_1(xs) = \sum_1^m \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,a_{m-r}(x)\ ;\ \mathrm{N}_2(xs) = \sum_{m-p}^m \int_0^1 c_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt\,.$$

Cioè si ha: *Le espressioni integro-differenziali di primo genere, tipo Volterra, si riducono ad espressioni integrali dello stesso tipo e di seconda (o terza) specie; quelle del tipo Fredholm si riducono invece, in generale, ad espressioni integrali miste di seconda (o terza) specie.*

Le ultime si possono però ridurre ad espressioni integrali tipo Fredholm se le a_r sono tutte nulle identicamente, salvo la a_m.

Se le espressioni (1), (2) si eguagliano a funzioni note $f_1(x)$, $f_2(x)$, avremo delle equazioni integro-differenziali. Queste, per quanto si è detto, si trasformeranno in equazioni integrali tipo Volterra, Fredholm e misto, di seconda specie, se $a_m(x)$ è sempre diverso da zero; se no, si avrebbero le equazioni di III specie del Picard.

3. Consideriamo invece le espressioni integro-differenziali di tipo Volterra e Fredholm e II genere:

$$(10)\qquad \sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x)+\int_0^x \sum_0^m b_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds$$

$$(11)\qquad \sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x)+\int_0^1 \sum_0^m b_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds\,.$$

Procedendo come nel caso n. 2 (delle espressioni di I genere, cioè), si ha che le (10) e (11) si mutano rispettivamente nelle (8) e (9); ma si deve notare che:

$$\mathrm{N}(xs)=\sum_1^m\left\{\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,a_{m-r}(x)+\int_0^x b_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt\right\}+b_m(xs)$$

ed

$$\mathrm{N}_2(xs)=\int_0^1\sum_1^m c_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-2}}{(r-1)!}\,dt+c_m(xs),$$

mentre N_1 rimane immutato.

Cioè: *Per le espresssioni di II genere la trasformazione avviene in modo identico a quelle di I genere.*

Da ciò si ricava che: *le equazioni lineari integro-differenziali di primo o secondo genere tipo Volterra, sono equivalenti ad equazioni integrali tipo Volterra di seconda (o terza) specie; quelle tipo Fredholm, in generale, ad equazioni miste.*

4. Prendiamo infine in esame il caso delle espressioni integro-differenziali di III genere:

$$(12)\qquad \sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x)+\int_0^x \sum_0^n b_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds \qquad (m<n)$$

$$(13)\qquad \sum_0^m a_r(x)\,\psi^{(r)}(x)+\int_0^1 \sum_0^n c_r(xs)\,\psi^{(r)}(s)\,ds \qquad (m<n)\,.$$

Al solito, poniamo:

$$\psi^{(r)}(s)=\varphi(s)\,.$$

per cui si ha immediatamente:

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,\varphi(s)\,ds-\mathrm{P}_r(x)=\psi^{(n-r)}(x)\qquad (r\geq 1)\,.$$

Dunque, la (12) e la (13) si potranno porre rispettivamente sotto la forma:

$$\int_0^x \left\{ \sum_{n-m}^{n} a_{n-r}(x) \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} \right\} \varphi(s)\, ds +$$
$$+ \int_0^x dt \cdot \int_0^t \left\{ \sum_1^n b_{n-r}(xt) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} \right\} \varphi(s)\, ds + \int_0^x b_n(xs)\, \varphi(s)\, ds + \mathrm{Q}(x)$$

$$\int_0^x \left\{ \sum_{n-m}^{n} a_{n-r}(x) \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} \right\} \varphi(s)\, ds +$$
$$+ \int_0^1 dt \cdot \int_1^t \left\{ \sum_1^n c_{n-r}(xt) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} \right\} \varphi(s)\, ds + \int_0^1 c_n(xs)\, \varphi(s)\, ds + \mathrm{Q}_1(x),$$

ove Q e Q_1 hanno lo stesso significato di prima e dipendono dalle a, b, c, P.

Scambiando nei secondi termini le integrazioni, con la regola di Dirichlet, avremo infine:

$$\int_0^x \mathrm{N}(xs)\, \varphi(s)\, ds + \mathrm{Q}(x) \tag{14}$$

$$\int_0^x \mathrm{N}_1(xs)\, \varphi(s)\, ds + \int_0^1 \mathrm{N}_2(xs)\, \varphi(s)\, ds + \mathrm{Q}_1(x), \tag{15}$$

ove sia:

$$\mathrm{N}(xs) = \sum_{n-m}^{n} a_{n-r}(x) \cdot \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \int_s^x \sum_1^n b_{n-r}(xt) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\, dt + b_n(xs);$$

$$\mathrm{N}_1(xs) = \sum_{n-m}^{n} a_{n-r}(x) \cdot \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!};$$

$$\mathrm{N}_2(xs) = \int_s^1 \sum_1^n c_{n-r}(xt) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\, dt + c_n(xs).$$

Si sono così ottenute espressioni integrali di prima specie, tipo Volterra o misto.

5. Diamo ora un esempio di tali trasformazioni. Consideriamo l'equazione integro-differenziale del problema dinamico della torsione ereditaria [1]. Essa è stata già ricondotta ad equazioni integrali; però il procedimento seguìto non lascia riconoscere se sia o no estendibile.

Con una lieve modifica, quell'equazione si può scrivere, senz'altro,

$$\varpi(t) + \mu \frac{d^2\varpi(t)}{dt^2} + \mu \int_0^t \frac{d^2\varpi(\tau)}{dt^2}\, \Phi(t\tau)\, d\tau = \mathrm{F}(t). \tag{16}$$

[1] Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, cap. IV, § 3, pag. 140.

Essa è evidentemente un'equazione di II genere, tipo Volterra. Poniamo dunque:

$$\frac{d^2\varpi(t)}{dt^2} = \varphi(t)\,, \tag{17}$$

e si avrà:

$$\frac{d\varpi(t)}{dt} = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau - c_1 \quad ; \quad \varpi(t) = \int_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds - c_1\,t - c_2 \tag{18}$$

Sostituendo queste espressioni nella (16), si ha:

$$\int_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds + \mu\varphi(t) + \\ + \mu \int_0^t \Phi(ts)\,\varphi(s)\,ds - (c_1\,t + c_2) = \mathrm{F}(t)\,, \tag{19}$$

ovvero:

$$\mu\varphi(t) + \int_0^t \{\mu\Phi(ts) + t - s\}\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(t) + c_1\,t + c_2\,, \tag{20}$$

che è evidentemente un'equazione regolare di Volterra di II specie.

Se poi, in luogo della (16), si avesse l'equazione

$$\varpi(t) + \mu\,\frac{d^2\varpi(t)}{dt^2} + \mu \int_0^1 \frac{d^2\varpi(\tau)}{d\tau^2}\,\Phi(t\tau)\,d\tau = \mathrm{F}(t), \tag{21}$$

con la sostituzione indicata, questa diventa:

$$\mu\varphi(t) + \int_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds + \mu \int_0^1 \Phi(ts)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(t) + c_1\,t + c_2 \tag{22}$$

che è un'equazione mista regolare di seconda specie.

6. Passando ora ad occuparci della (3), diremo che essa è di *primo* genere se m è maggiore di n e di p; di *secondo* genere se è eguale a uno dei due, e maggiore o eguale all'altro; di *terzo* genere se infine è minore di almeno uno di essi.

Con procedimenti analoghi a quelli tenuti nei numeri precedenti, si vede che le espressioni integro-differenziali miste di primo genere, ponendo

$$\psi^{(m)}(x) = \varphi(x)\,, \tag{23}$$

si riducono ad espressioni integrali miste di seconda (o terza) specie:

$$a_m(x)\cdot\varphi(x) + \int_0^x \mathrm{N}_1(xs)\,\varphi(s)\,ds + \int_0^1 \mathrm{N}_2(xs)\,\varphi(s)\,ds + \mathrm{Q}(x)\,, \tag{24}$$

ove sia:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{N}_1(xs) &= \sum_1^m a_{m-r}(x)\,\frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{m-n}^m \int_s^1 b_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)}\,dt \\ \mathrm{N}_2(xs) &= \sum_{m-p}^m \int_s^1 c_{m-r}(xt)\,\frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt\,. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Quelle di secondo genere si trasformano in modo analogo in espressioni integrali miste di seconda (o terza) specie. Però, se $m = n > p$, si avrà che N_2 rimane lo stesso di (25), mentre:

$$(26) \quad N_1(xs) = \sum_1^m \left\{ a_{m-r}(x) \frac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \right. \\ \left. + \int_s^x b_{m-r}(xt) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt \right\} + b_m(xs).$$

Se $m = p > n$, la N_1 rimane immutata, mentre:

$$(27) \qquad N_2(xs) = \sum_1^m \int_s^1 c_{m-r}(xt) \cdot \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt + c_m(xs);$$

ed infine, se $m = n = p$, N_1 ed N_2 di (25) si mutano rispettivamente in (26), (27).

7. È poi chiaro che le espressioni di terzo genere si muteranno in espressioni integrali miste di prima specie:

$$(28) \qquad \int_0^x N_1(xs)\, \varphi(s)\, ds + \int_0^1 N_2(xs)\, \varphi(s)\, ds + Q(x).$$

Evidentemente, se $n > p$, bisogna porre

$$\psi^{(n)}(x) = \varphi(x),$$

ed allora si ha:

$$(29) \quad \begin{cases} N_1(xs) = \sum\limits_{n-m}^{n} a_{n-r}(x) \cdot \dfrac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_1^n \int_s^x b_{n-r}(xt) \dfrac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt + b_n(xs) \\ N_2(xs) = \sum\limits_{n-p}^{n} \int_s^1 c_{n-r}(xt) \dfrac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \end{cases}$$

Se $p = n$, bisogna porre ancora

$$\psi^{(n)}(x) = \varphi(x),$$

ma la $N_2(xs)$ si muta in

$$N_2(xs) = \sum_1^p \int_s^1 c_{p-r}(xt) \cdot \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} + c_p(xs);$$

se infine $p > n$, si deve porre:

$$\psi^{(p)}(x) = \varphi(x),$$

e con i soliti procedimenti si ricava:

$$(30) \quad \begin{cases} N_1(xs) = \sum\limits_{p-m}^{p} a_{p-r}(x) \dfrac{(x-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \sum\limits_{p-n}^{p} \int_s^x b_{p-r}(xt) \cdot \dfrac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt \\ N_2(xs) = \int_s^1 \sum\limits_1^p c_{p-r}(xt) \cdot \dfrac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} dt + c_p(xs). \end{cases}$$