ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Efflusso da un recipiente forato sul fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla permutabilità di due segni di limite.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè sia

$$\lim_{x=\xi}\lim_{y=\eta} f(x\,,y) = \lim_{y=\eta}\lim_{x=\xi} f(x\,,y) \tag{1}$$

è un problema di notevole utilità in analisi, tanto più se la condizione riesce semplice e facilmente applicabile agl'importanti casi particolari della (1). Possiamo senz'altro (qualunque sia quella delle usuali definizioni di limite che ci piaccia di adottare) ricondurci al caso (apparentemente particolare) della ricerca di una condizione necessaria e sufficiente per la continuità di una serie di funzioni continue.

Supponiamo, infatti, che le funzioni $u_1(x)\,,u_2(x)\,,u_3(x)\,....$ formino una serie $s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$ convergente in ogni punto di un intervallo $(a\,,b)$, e che queste funzioni $u_1(x)\,,u_2(x)\,,u_3(x)\,,\ldots$ siano continue nel punto ξ di quest'intervallo. Posto $s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+ +\cdots+u_n(x)$, allora sarà

$$\lim_{x=\xi} s(x) = \lim_{x=\xi}\lim_{n=\infty} s_n(x)\,;$$

sarà, invece,

$$s(\xi) = \lim_{n=\infty} s_n(\xi) = \lim_{n=\infty}\lim_{x=\xi} s_n(x)\,.$$

La continuità della serie nel punto ξ, traducendosi nella formula

$$s(\xi) = \lim_{x=\xi} s(x)\,,$$

lascerà scrivere

$$\lim_{x=\xi}\lim_{n=\infty} s_n(x) = \lim_{n=\infty}\lim_{x=\xi} s_n(x)\,. \tag{2}$$

È solo apparente la particolarità di (2) rispetto ad (1), perchè non costituisce specialità il fatto che n tenda all'infinito sui numeri interi (qualunque sia, ripeto, quella fra le usuali definizioni di limite che qui voglia adottarsi).

Assodata la possibilità di occuparci del caso generale, trattando il caso, di particolare apparenza, relativo alle serie, noi subito osserviamo che, per esempio, la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3\nu x}{1+\nu^2x^2}-\frac{3(\nu+1)x}{1+(\nu+1)^2x^2}\right)$$

rappresenta, nell'intervallo $(0\,,1)$, la funzione continua $\dfrac{3x}{1+x^2}$; ora il suo $\mathrm{R}_{n-1}(x)$, cioè il suo resto $u_n(x)+u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$, vale $\dfrac{3nx}{1+n^2x^2}$, ed è chiaro che per nessun n fisso si può pretendere che, indipendentemente da x, sia $\left|\dfrac{3nx}{1+n^2x^2}\right|<\varepsilon$. Anche nella generosa ipotesi espressa da $\varepsilon=1$, tale relazione, traducendosi nella seguente:

$$3nx<1+n^2x^2\,,$$

o anche $nx<(1-nx)^2$, ci interdirebbe, per esempio, di assumere $x=\dfrac{1}{n}$.

Per trovare una semplice condizione, che sia sufficiente ma anche necessaria alla continuità della serie, supponiamo, come prima, che le funzioni $u_1(x)\,,u_2(x)\,,u_3(x)\,,\ldots$ formino una serie $s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ convergente in ogni punto di un intervallo finito $(a\,,b)$, e che siano continue, ognuna per proprio conto, nel punto ξ di quest'intervallo. Imponiamo allora la condizione seguente:

A) Fissato, così piccolo come si voglia, un numero positivo ε, esistano, corrispondentemente, un numero positivo k ed un numero naturale n, tali che, per ogni x, appartenente ad $(a\,,b)$ ed atto a verificare la relazione $|x-\xi|\leqq k$, sia $|\mathrm{R}_n(x)|<\varepsilon$.

Questa condizione (valide le relative premesse) è necessaria e sufficiente per la continuità della serie $s(x)$ nel punto ξ. La sufficienza è evidente; la necessità si può subito dimostrare per assurdo. Supponiamo che $s(x)$ sia continua in ξ e che la condizione *A)* non valga. Allora, a cagione della supposta convergenza della serie nel punto ξ, si potrà, con opportuno n fisso, porre $|\mathrm{R}_n(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$; ma, negando la condizione *A)*, si deve ammettere che sempre esista, nelle più immediate vicinanze di ξ, qualche x atto a verificare la relazione $|\mathrm{R}_n(x)|\geqq\varepsilon$. Ora, se x e ξ sono abbastanza vicini, si può scrivere $|s_n(x)-s_n(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, perchè $s_n(x)$ è una somma finita di funzioni continue. Ma allora $s(x)-s(\xi)$, cioè $s_n(x)-s_n(\xi)+\mathrm{R}_n(x)-\mathrm{R}_n(\xi)$, supera, in valore assoluto, la grandezza $\dfrac{\varepsilon}{2}$; resta dunque assurdo che $s(x)$ sia continua in ξ.

A titolo d'esercizio, si può aggiungere qualche considerazione importante. Supponiamo che la condizione *A)* valga in ogni punto di $(a\,,b)$; sia fissato ε, e si chiamino k_1 ed n_1 il numero k ed il numero n della condizione A), relativi qui al punto a; si chiamino k_2 ed n_2 quelli relativi al punto $a + k_1$; poi k_3 ed n_3 quelli relativi al punto $a + k_1 + k_2$, ecc. Dico che si potranno determinare questi tratti $k_1, k_2, k_3, \ldots$, in numero *finito*, in modo che ripartiscano tutto l'intervallo (a, b). Infatti, se dovessero necessariamente assumersi in numero infinito, i loro estremi di destra avrebbero un valore limite $\xi \leqq b$: dunque non si potrebbe (per colpa dei punti posti all'immediata sinistra di ξ) far corrispondere a ξ un k tanto piccolo da verificare la A). Osserveremo, ancora, che la funzione $R_N(x)$, relativa ad un arbitrario numero naturale fisso N, risulta anch'esas continua: dunque vale anche per la serie $R_N(x)$ la condizione A); ed allora la A) stessa si può enunciare come segue: fissati ad arbitrio il numero positivo ε ed il numero naturale N, esiste una ripartizione di (a, b) in un numero finito di tratti $k_1, k_2, \ldots, k_m$ tali che (in ognuno di essi indipendentemente da x) si possa scrivere $|R_{n_1}(x)| < \varepsilon$, $|R_{n_2}(x)| < \varepsilon, \ldots, |R_{n_m}(x)| < \varepsilon$, dove i numeri $n_1, n_2, \ldots, n_m$ siano m numeri maggiori ognuno di N. Nei punti di confine deve valere l'uno e l'altro dei due numeri n relativi ai due tratti che vi fanno capo. Questa condizione (*convergenza uniforme a tratti*), che soltanto, dunque, in apparenza differisce dalla condizione A), fu trovata dal professore Arzelà, di buona ed onorata memoria; il prof. Vivanti ne ha dato una semplice dimostrazione diretta. L'enunciato A) mi pare vantaggioso, sia per la semplicità, sia per la più agile applicabilità a questioni più generali.

Di queste cose ho già fatto cenno nei Rendiconti dell'Accademia di Porto, e nei miei numerosi corsi. Richiamo ora su di esse l'attenzione di quest'illustre Accademia, per mettere in luce, più che per altro, alcuni concetti immediatamente applicabili ad utili ed operose ricerche, specialmente in un'eventuale raffinata applicazione ad importanti casi particolari.

Geometria. — *Su alcuni teoremi di geometria piana analoghi a quelli di Max Dehn nella geometria solida.* Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

Dopo le classiche ricerche di G. Sforza e di Max Dehn, le quali hanno dimostrato la impossibilità di evitare processi infinitesimali, per dimostrare l'eguaglianza di volume di due piramidi di egual base ed eguale altezza, e le semplificazioni (¹) successivamente apportate alla dimostrazione definitiva di Max Dehn, appariva tuttavia alquanto oscura l'intima ragione del come l'inevitabilità di processi infiniti sia collegata coi problemi dell'eguaglianza dei volumi di poliedri, mentre nulla di analogo si conosceva nel piano.

(¹) Per la bibliografia completa, si veda: Amaldi, *Sulla teoria della equivalenza* in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, di F. Enriquez. Bologna, Zanichelli, 1912, vol. I, pp. 173-190.