

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

fissato ε , e si chiamino k_1 ed n_1 il numero k ed il numero n della condizione A), relativi qui al punto a ; si chiamino k_2 ed n_2 quelli relativi al punto $a + k_1$; poi k_3 ed n_3 quelli relativi al punto $a + k_1 + k_2$, ecc. Dico che si potranno determinare questi tratti k_1, k_2, k_3, \dots , in numero *finito*, in modo che ripartiscano tutto l'intervallo (a, b) . Infatti, se dovessero necessariamente assumersi in numero infinito, i loro estremi di destra avrebbero un valore limite $\xi \leq b$: dunque non si potrebbe (per colpa dei punti posti all'immediata sinistra di ξ) far corrispondere a ξ un k tanto piccolo da verificare la A). Osserveremo, ancora, che la funzione $R_N(x)$, relativa ad un arbitrario numero naturale fisso N , risulta anch'essa continua: dunque vale anche per la serie $R_N(x)$ la condizione A ; ed allora la A) stessa si può enunciare come segue: fissati ad arbitrio il numero positivo ε ed il numero naturale N , esiste una ripartizione di (a, b) in un numero finito di tratti k_1, k_2, \dots, k_m tali che (in ognuno di essi indipendentemente da x) si possa scrivere $|R_{n_1}(x)| < \varepsilon, |R_{n_2}(x)| < \varepsilon, \dots, |R_{n_m}(x)| < \varepsilon$, dove i numeri n_1, n_2, \dots, n_m siano m numeri maggiori ognuno di N . Nei punti di confine deve valere l'uno e l'altro dei due numeri n relativi ai due tratti che vi fanno capo. Questa condizione (*convergenza uniforme a tratti*), che soltanto, dunque, in apparenza differisce dalla condizione A), fu trovata dal professore Arzelà, di buona ed onorata memoria; il prof. Vivanti ne ha dato una semplice dimostrazione diretta. L'enunciato A) mi pare vantaggioso, sia per la semplicità, sia per la più agile applicabilità a questioni più generali.

Di queste cose ho già fatto cenno nei Rendiconti dell'Accademia di Porto, e nei miei numerosi corsi. Richiamo ora su di esse l'attenzione di quest'illustre Accademia, per mettere in luce, più che per altro, alcuni concetti immediatamente applicabili ad utili ed operose ricerche, specialmente in un'eventuale raffinata applicazione ad importanti casi particolari.

Geometria. — *Su alcuni teoremi di geometria piana analoghi a quelli di Max Dehn nella geometria solida.* Nota del prof. G. VACCA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Dopo le classiche ricerche di G. Sforza e di Max Dehn, le quali hanno dimostrato la impossibilità di evitare processi infinitesimali, per dimostrare l'eguaglianza di volume di due piramidi di egual base ed eguale altezza, e le semplificazioni ⁽¹⁾ successivamente apportate alla dimostrazione definitiva di Max Dehn, appariva tuttavia alquanto oscura l'intima ragione del come l'inevitabilità di processi infiniti sia collegata coi problemi dell'eguaglianza dei volumi di poliedri, mentre nulla di analogo si conosceva nel piano.

⁽¹⁾ Per la bibliografia completa, si veda: Amaldi, *Sulla teoria della equivalenza in questioni riguardanti le matematiche elementari*, di F. Enriquez. Bologna, Zanichelli, 1912, vol. I, pp. 173-190.

Sono riuscito ora a trovare un parallelismo assai notevole, conducente a dimostrazioni dello stesso tipo di quello di Max Dehn, nella geometria piana.

Basta perciò far corrispondere alla sovrapposibilità mediante un moto elicoidale, nello spazio, di due poliedri, quella, nel piano, di due poligoni piani, per mezzo di una *traslazione*.

Ho dovuto perciò introdurre il concetto di eguaglianza per traslazione, che nel piano corrisponde alla eguaglianza per semplice sovrapposizione nello spazio.

È stato inoltre necessario di introdurre un nuovo concetto astratto di angolo, il quale, a mia conoscenza, non aveva ancora formato oggetto delle ricerche nei geometri.

Ho così ottenuti alcuni teoremi, la cui dimostrazione, alquanto più semplice di quella dei corrispondenti teoremi della geometria solida, può contribuire a meglio rendere conto dell'intima essenza dei problemi di questo genere.

Questi teoremi sono probabilmente veri anche senza la condizione restrittiva che è occorsa per la dimostrazione che qui ne ho data. Però non sembra facile toglierla, seguendo la via da me qui esposta.

I. *Angoli orientati*. — Concepisco l'angolo piano come una grandezza avente soltanto una determinata orientazione. In questo senso dirò eguali due angoli rivolti dalla stessa parte ed aventi i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte.

A questa grandezza mi pare opportuno di dare il nome di angolo *orientato*. In seguito, dovendo parlare soltanto di angoli di questa specie, per brevità li chiamerò soltanto *angoli*, quando non vi sia luogo ad equivoci.

Gli enti considerati sono suscettibili di *somma*. Se due angoli *orientati* hanno un lato dell'uno parallelo, e rivolto dalla stessa parte ad uno dell'altro, la somma di questi due angoli sarà l'angolo somma di questi due nel senso euclideo, soltanto se i due angoli sono orientati da bande opposte del lato parallelo. Se invece sono orientati dalla stessa banda del lato parallelo, come loro somma potrà anche intendersi il minore dei due angoli contato due volte, ed inoltre la differenza (nel senso euclideo) tra il maggiore e il minore.

Il doppio di un angolo sarà l'angolo stesso contato due volte (e non già un angolo avente ampiezza doppia). E parimenti, se m è un numero intero positivo, m volte un angolo orientato è soltanto l'angolo stesso contato m volte.

Rimane sempre vero, come per gli angoli euclidei, che se un angolo si divide in parti con semirette uscenti dal vertice ed interne all'angolo, esso è somma delle sue parti. Ma se due angoli orientati hanno la stessa ampiezza, ma non sono egualmente orientati, essi potranno avere eguale soltanto la parte egualmente orientata in ciascuno di essi.

L'angolo orientato appare, così, come un'astrazione dalla classe dei semiraggi contenuti in un angolo euclideo.

L'angolo orientato si può anche considerare come astrazione dall'eguaglianza di due angoli tali che la porzione di piano compresa nell'uno si possa far coincidere con quella compresa nell'altro, per mezzo di una traslazione.

Definiti così a sufficienza questi concetti, ci limiteremo a considerare, da ora innanzi, figure di uno stesso piano.

II. *Eguaglianza per traslazione.* — Diremo *eguali per traslazione* due figure quando l'una possa coincidere con l'altra per mezzo di una traslazione (nel piano considerato).

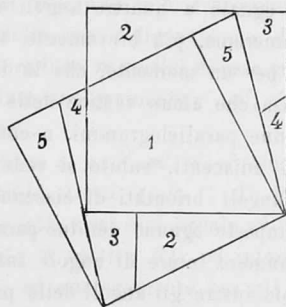


FIG. 1.

Considerando le ordinarie dimostrazioni con le quali si giunge a decomporre in un numero finito di parti eguali due parallelogrammi di egual area, si può facilmente osservare che le singole parti in cui si decompongono i due parallelogrammi di egual area, sono, non soltanto eguali, ma altresì eguali per traslazione. Quindi è facile di persuadersi che

Due parallelogrammi di egual area sono decomponibili in un numero finito di parti eguali per traslazione.

Così ancora è facile vedere, per es., dalla dimostrazione euclidea, che i quadrati dei cateti di un triangolo rettangolo sono decomponibili in un numero finito di parti eguali per traslazione, ciascuna a ciascuna, ad altrettante parti in cui si può decomporre il quadrato dell'ipotenusa. Queste parti sono almeno cinque nel caso più generale, e a quattro soltanto si riducono se i due cateti sono eguali.

Una curiosa conseguenza di queste considerazioni è la seguente: *È possibile di decomporre un qualsivoglia parallelogrammo in un numero finito di parti in modo che queste, dopo aver subito ciascuna una traslazione, riformino il parallelogrammo stesso ruotato di un angolo arbitrario, per es., piccolo a piacere.*

Nel caso di un quadrato, queste parti sono cinque soltanto, come appare da ovvie considerazioni elementari sulla fig. 1.

Si ha così una specie di decomposizione di una rotazione apparente, in un numero finito di traslazioni.

III. *Eguaglianza per traslazione di triangoli.* — Ma le cose procedono in modo completamente diverso per due triangoli di egual area. Infatti, è bensì evidente che si possono decomporre in un numero infinito di parti eguali per traslazione due triangoli di egual area; ma la decomponibilità in un numero finito di parti non è sempre possibile. La ragione di questa impossibilità appare, quando si consideri perchè sia invece possibile la decomposizione, in un numero finito di parti eguali per traslazione, di due parallelogrammi di egual area. La somma degli angoli (interni) orientati di un parallelogramma è infatti eguale a quattro angoli retti adiacenti, aventi il vertice comune (che chiameremo, più brevemente, un angolo intero).

Se ora supponiamo, per un momento, che la decomposizione in poligoni parziali sia possibile senza che alcun vertice delle parti cada sul contorno dei due parallelogrammi, o entro i lati di alcuna delle parti adiacenti, subito si vede che la somma di tutti gli angoli orientati di ciascuna delle parti, in cui è decomposto ognuno dei due parallelogrammi, è eguale ad un numero intero di angoli interi. Infatti formano un angolo intero gli angoli delle parti attorno ad ogni vertice interno al parallelogramma considerato, e formano pure un angolo intero i quattro angoli del parallelogramma.

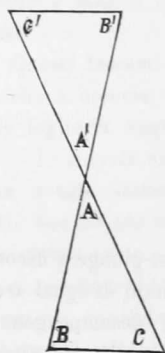


FIG. 2.

Una ulteriore analisi porta alla considerazione del caso in cui un certo numero di vertici delle parti cade sui lati di uno dei parallelogrammi, o sui lati di qualche parte adiacente. Ma è inutile di proseguire, perchè già

sappiamo, dalla geometria elementare, che tale decomposizione è possibile.

Appare invece subito l'impossibilità della decomposizione in un numero finito di parti di due triangoli simmetrici (fig. 2) rispetto ad un vertice, ABC , $A'B'C'$, se la decomposizione si volesse fatta in modo che entro a ciascuno dei due triangoli cadesse un egual numero di vertici dei poligoni parziali, e nessun vertice sui lati di alcuno di essi. In tal caso, infatti, dovendo la somma degli angoli orientati di tutte le parti di ABC essere eguale a quella di tutti gli angoli orientati delle parti di $A'B'C'$, ed essendo la somma degli angoli attorno ai vertici interni di ABC eguale a tanti angoli interni quanti sono i vertici, e tale pure essendo la somma degli angoli interni ad $A'B'C'$, dovrebbe la somma degli angoli del primo triangolo essere eguale a quella del secondo, $A + B + C = A' + B' + C'$.

Ora, tale eguaglianza è manifestamente assurda, secondo la definizione data di angolo orientato.

la quale è impossibile, dovendo esser tutti positivi o nulli gli addendi $m, n, p, r - r'$.

Quindi l'ipotesi fatta della possibilità di una divisione in un numero finito di parti annodate eguali per traslazione, dei due triangoli $ABC, A'B'C'$ è assurda, c. v. d.

V. — Si può togliere in alcuni casi, e rendere meno restrittiva in altri, la condizione che la decomposizione dei due triangoli sia fatta per mezzo di parti annodate. Si può, quindi, in due decomposizioni non annodate, cioè tali che qualche vertice interno di un poligono parziale cada su qualche lato di un poligono adiacente, considerare ogni lato, in tali condizioni, decomposto in due parti, formanti un angolo piatto. Se allora accade che il numero

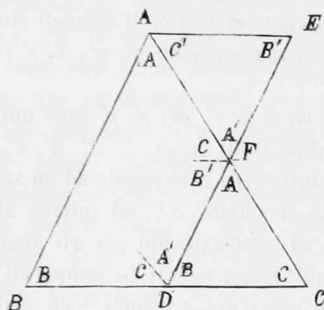


FIG. 3.

di tali vertici aggiunti ai poligoni parziali nell'una e nell'altra decomposizione sia lo stesso in ogni complesso dei lati paralleli appartenenti ai poligoni parziali e coincidenti nell'una e nell'altra decomposizione, le equazioni della dimostrazione precedente sono ancora applicabili.

Ed infine si possono anche considerare, se ciò non accade, come vertici dei poligoni parziali, quelli che son tali per l'uno o per l'altro di due poligoni adiacenti, nell'una o nell'altra decomposizione. Se questo processo non è infinito (il che può talvolta accadere), si è ricondotti al caso di due decomposizioni in parti annodate.

VI. — Parimenti: *È impossibile di decomporre un triangolo ed un parallelogrammo in un numero finito di parti annodate eguali per traslazione.*

Basta dimostrare questa proposizione per un parallelogrammo convenientemente scelto. Dato (fig. 3) il triangolo ABC , essendo D il punto medio della base BC , sceglieremo il parallelogrammo di lati AB, BD . Detti allora $A'B'C'$, gli angoli del triangolo ABC , ed $A'B'C'$, quelli opposti al vertice, gli angoli del parallelogrammo $ABDE$ sono, ordinatamente, $A + C', B; C + A', B'$.

Se allora si suppongono il triangolo e il parallelogrammo decomposti in parti annodate eguali per traslazione, e se sul lato AE cadono s vertici, sul lato ED t vertici, sul lato BD u vertici, sul lato AB v vertici; e della rete che divide il triangolo, su AB cadono p vertici, su BC m vertici, e su AC n vertici, e finalmente se internamente ad ABC cadono r vertici, ed internamente ad $ABDE$ cadono r' vertici, deve aver luogo l'eguaglianza:

$$\left. \begin{aligned} & s(A + B' + C') + t(A' + B' + C) + u(A' + B + C) + \\ & \qquad \qquad \qquad + v(A + B + C') + (r' + 1)(A + B + C + A' + B' + C) = \\ & m(A' + B + C) + n(A + B' + C) + p(A + B + C') + \\ & \qquad \qquad \qquad + r(A + B + C + A' + B' + C) + A + B + C. \end{aligned} \right\}$$

Questa dà luogo alle sei eguaglianze:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} s + v + r' + 1 = n + p + r + 1 & t + u + r' + 1 = m + r \\ u + v + r' + 1 = m + p + r + 1 & s + t + r' + 1 = n + r \\ t + u + r' + 1 = m + n + r + 1 & s + v + r' + 1 = p + r \end{array} \right.$$

Ora, dalla prima e dalla sesta si ricava $n + 1 = 0$, la quale già basta per dimostrare l'impossibilità di tutto il sistema, dovendo i numeri m, n, p , esser tutti interi positivi o nulli. Si conclude quindi l'impossibilità che si voleva dimostrare (¹).

Questo secondo teorema include il precedente (ma non viceversa). Se infatti fosse possibile di decomporre in parti eguali per traslazione i due triangoli opposti al vertice AEF e DCF , sarebbe pur possibile di far lo stesso per il triangolo ABC ed il parallelogrammo $ABDE$, contro il teorema.

(¹) Questo teorema si può generalizzare alquanto, come si è fatto per il precedente.

Osserveremo, in ultimo, che con procedimenti assai più semplici si dimostrano queste proposizioni, le quali mi si sono presentate prima di quelle ora dimostrate.

A. — È impossibile di decomporre un triangolo in un numero finito di parallelogrammi. Basta perciò, supposta la cosa possibile, considerare gli angoli alla base dei parallelogrammi aventi le loro basi consecutive sopra la base del triangolo dato, ricordare che la somma degli angoli alla base del triangolo è minore di due retti, ecc.

B. — In qualsivoglia dato parallelogrammo, decomposto in un numero finito di parallelogrammi, ciascuno di questi ultimi ha i lati paralleli rispettivamente a quelli del parallelogrammo dato.