ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale*. Nota di Emma Sciolette, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra le serie algebriche appartenenti ad una curva algebrica* [1]. Nota di Edward S. Allen, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. In una Memoria [2] che verrà pubblicata nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, definisco certi caratteri di una serie algebrica di gruppi di punti sopra una curva algebrica, dimostro qualche teorema rispetto a questi caratteri, e ottengo una formola che estende alle serie algebriche qualsiansi una nota formola di De Jonquières [3] relativa alla serie lineari. Qui vorrei dare un riassunto dei risultati che si trovano nella detta Memoria, e far vedere la loro applicazione alla teoria di certe varietà algebriche.

2. Sopra una curva algebrica irriducibile C di genere p, una serie algebrica γ_m^ϱ si definisce come una serie ∞^ϱ di gruppi di m punti della curva, tale che i gruppi siano in corrispondenza biunivoca con i punti di una varietà algebrica a ϱ dimensioni. Se in particolare i gruppi sono in corrispondenza biunivoca coi punti di uno spazio lineare S_ϱ, la serie si chiama lineare e suol scriversi g_m^ϱ invece di γ_m^ϱ. Una serie algebrica si dice *irriducibile* se la varietà corrispondente lo è; si dice *composta* se ogni suo gruppo si divide in un certo numero (>1) di gruppi di un'altra serie algebrica; altrimenti si dice non composta.

3. m e ϱ si chiamano l'ordine e la dimensione della serie γ_m^ϱ rispettivamente. Il numero dei gruppi che contengono ϱ punti generici fissi della curva C si chiama l'indice ν della serie.

Se in una γ_m^ϱ si sottraggono certi x punti da quei gruppi della γ che li contengono, ne risulta una serie che si dice serie *subordinata* nella γ_m^ϱ

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1913.

[2] Allen, *Su alcuni caratteri di una serie* ecc. (Rend. di Palermo, 1913).

[3] De Jonquières, *Sur les contacts multiples* ecc. (Journ. für d. reine u. a. Math., Bd. 66, 1866); R. Torelli, *Dimostrazione di una formola di De Jonquières* (Rendiconti di Palermo, 1906).

dagli x punti. Data una serie lineare g^m di dimensione m, e una γ^ρ_m, se si sottrae ogni gruppo della γ dal gruppo della g che lo contiene, si ottiene una serie che si chiama *residua* della γ rispetto alla g.

4. Premesse queste spiegazioni, possiamo procedere alla definizione dei caratteri accennati nel § 1. Sia data una serie algebrica γ^ρ_m, irriducibile, non composta, di dimensione ϱ, indice ν, ordine m, sopra una curva algebrica irriducibile C di genere p. Definiamo i numeri $z_1, z_2, \ldots z_\rho$, nel modo seguente: z_b *sia il numero di quei gruppi di una* $\gamma^b_{m-\rho+b}$, *subordinata nella* γ^ρ_m *data da* $(\varrho - b)$ *punti generici, che sono contenuti in una* $g^{m-\rho}_{m+p-\rho}$ *generica*. Si vede che z_1 e z_2 sono rispettivamente la z e la Z che il Castelnuovo e R. Torelli [1] adoperano nelle loro formole per determinare quanti gruppi di una serie algebrica sono dotati di uno o di due punti doppî. È evidente che, se estendiamo la definizione delle z_b al caso $b = 0$, z_0 coinciderà coll'indice ν della serie; quindi scriveremo sempre z_0 invece di ν.

5. Una seconda definizione delle z_b è la seguente: z_b *è il prodotto dell'indice della* γ^b_p *residua di una* $\gamma^b_{m-\rho+b}$, *subordinata nella* γ^ρ_m *data da* $(\varrho - b)$ *punti generici, rispetto ad una* $g^{m-\rho+b}_{m+p-\rho+b}$ *generica, e del numero dei gruppi della* $\gamma^b_{m-\rho+b}$ *equivalenti ad un suo gruppo generico.*

6. I teoremi principali rispetto ai caratteri z_b sono i seguenti:

I. *Ogni* z, *il cui indice superi* p, *è nulla.*

II. *Se* $z_b = 0$, *allora* $z_{b+1} = z_{b+2} = \cdots = z_\rho = 0$.

III. *Se, per una serie algebrica* γ^ρ_m, *abbiamo* $z_b > 0$, *ma* $z_{b+1} = 0$, *allora i gruppi della* γ^ρ_m *si ripartiscono in* ∞^b *serie* $\infty^{\rho-b}\,\bar{\gamma}$, *tali che i gruppi di una stessa* $\bar{\gamma}$ *sono a due a due equivalenti, e non lo sono mai due gruppi di* $\bar{\gamma}$ *diverse.*

7. L'estensione della formola di De Jonquières dà il numero $d_{k_1k_2\ldots k_a}$ dei gruppi di una serie algebrica γ^ρ_m irriducibile, non composta, sopra una curva di genere p, dotati di un punto $(k_1 + 1)$-plo, di un punto $(k_2 + 1)$-plo, ..., di un punto $(k_a + 1)$-plo, e, se $\sum_{i=0}^{a} k_i$ è minore della dimensione ϱ della serie, di $(\varrho - \Sigma k)$ punti *fissi* generici della curva.

[1] Castelnuovo, *Sulle serie algebriche* ecc. (Rend. dei Lincei, 1906); R. Torelli, *Sulle serie algebriche* ecc. (Atti del R. Ist. Veneto, 1908).

8. La formola è la seguente:

$$(1) \quad d_{k_1 k_1 \dots k_a} = \frac{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_a+1)}{c_1!\,c_2!\cdots c_n!} \sum_{b=0}^{a} \sum_{h=b}^{a} (-1)^b z_b\, y_h\, h! \times$$
$$\times \binom{p-b}{h-b} (a-h)! \binom{m-\varrho-h}{a-h}.$$

Le c e le y dipendono dai numeri k_i che dànno le molteplicità dei punti multipli.

Le c dànno i numeri delle ripetizioni nelle k_i. Cioè

$$k_1 = k_2 = \cdots k_{c_1}\,; k_{c_1+1} = k_{c_1+2} = \cdots k_{c_1+c_2}\,; \cdots; k_{c_1+\dots+c_{n-1}+1} = \cdots = k_{c_1+\dots+c_{n-1}+c_n}$$

y_h è la somma dei prodotti delle k_i ad h ad h. Vale a dire:

$$y_0 = 1\,;$$

$$y_1 = \sum_{i=0}^{a} k_i\,;$$

$$y_2 = \sum_{i_1=1, i_2=1}^{a,a} k_{i_1} k_{i_2} \quad , \quad i_1 \neq i_2\,;$$

. . . .

$$y_{a-1} = \sum_{i_1=1, i_2=1, \dots i_{a-1}=1}^{a,a,\dots a} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_{a-1}}\,,$$ tutte le i essendo disuguali;

$$y_a = k_1\, k_2 \dots k_a\,.$$

9. Fra i casi speciali di questa formola si trovano quelli dei numeri dei gruppi con uno o due punti doppî, accennati nel § 4. R. Torelli [1] ne ha dimostrato un altro, che dà il numero d_k dei gruppi aventi un punto $(k+1)$-plo e $(\varrho - k)$ punti generici fissi:

$$(2) \quad d_k = (k+1)\left[z_0(m + kp - \varrho) - z_1 k\right].$$

Il numero $d_{1_{[a]}}$ dei gruppi dotati di a punti doppî e di $(\varrho - a)$ punti generici fissi si calcola subito:

$$(3) \quad d_{1_{[a]}} = 2^a \sum_{b=0}^{a} \sum_{h=b}^{a} (-1)^b z_b \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\varrho-h}{a-h}$$

La stessa formola di De Jonquières si deduce dalla (1), ricordando che una serie lineare ha l'indice $z_0 = 1$, e che, secondo § 6, Teorema III,

[1] R. Torelli, *Sui sistemi algebrici di curve* ecc. (Atti della R. Accad. di Torino, a. 1906).

$z_1 = z_2 = \cdots = z_\varrho = 0$. In questo caso abbiamo

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
d_{k_1 k_2 \ldots k_a} &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_a+1)}{c_1!\,c_2!\cdots c_n!} \sum_{h=0}^{a} y_h h! \binom{p}{h} (a-h)! \binom{m-\varrho-h}{a-h} = \\
&= \frac{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_a+1)}{c_1!\,c_2!\cdots c_n!} \times \\
&\times [(m-\varrho)(m-\varrho-1)(m-\varrho-2)\cdots(m-\varrho-a+1) \\
&+ (m-\varrho-1)(m-\varrho-2)\cdots(m-\varrho-a+1)\,p\,h_1 \\
&+ (m-\varrho-2)\cdots(m-\varrho-a+1)\,p(p-1)\,h_2 \\
&+ (m-\varrho-a+1)\,p(p-1)\cdots(p-a+2)\,h_{a-1} \\
&+ p(p-1)\cdots(p-a+2)(p-a+1)\,h_a
\end{aligned}
\right.
$$

Questa è la forma data da R. Torelli nella Nota già citata [1].

10. Dai caratteri z_b di una serie γ_m^ρ è possibile ricavare le z_b della serie $\gamma_{m-k-1}^{\rho-k}$ che si ottiene dalla γ_m^ρ sottraendo ciascun punto $(k+1)$-plo dal gruppo della γ_m^ρ nel quale comparisce. Chiamiamo questa serie $\overset{k}{\gamma}$, e le sue costanti $\overset{k}{z}_b$. Allora queste sono date dalla formola:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\overset{k}{z}_b &= (k+1)^2 (p-b+1) z_{b-1} + (k+1)[m-\varrho+kp-b(2k+1)] z_b \\
&\quad - (b+1)\,k(k+1)\,z_{b+1}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Adoperando la (5) ripetutamente, si può arrivare alle z relative alla serie subordinata nella γ_m^ρ da un aggruppamento qualsiasi di punti multipli.

11. I caratteri z_b, i teoremi intorno ad essi, e la formola (1) trovano una interpretazione iperspaziale interessante nel caso che $\varrho = p$. Si sa che è possibile di rappresentare le x-ple di punti di una curva algebrica di genere p mediante una varietà ad x dimensioni, tale che ad ogni gruppo di x punti corrisponda un punto della varietà, ed uno solo. Sia A questa varietà delle m-ple di punti della curva base C. Ad un punto della curva corrisponde una V_{m-1}, luogo dei punti i cui gruppi corrispondenti sulla curva passano per il punto scelto; chiamiamo B queste V_{m-1}.

12. Una serie γ_m^ρ sulla curva C corrisponderà ad una varietà ∞^ρ $E^{(\rho)}$ dentro la A. I punti che rappresentano gruppi con un punto doppio stanno

(1) R. Torelli, *Dimostrazione di una formula di De Jonquières* (Rend. di Palermo, a. 1906).

in una varietà che può chiamarsi l'inviluppo I del sistema delle B, cioè la varietà che contiene l'intersezione di ogni B con quella infinitamente vicina; i punti che rappresentano gruppi con due punti doppî stanno nella varietà doppia della I; e così di seguito.

13. Adesso conviene dare la definizione iperspaziale delle z_b, che corrisponde a quella data nel § 4. Abbiamo già visto che una γ_m^ρ vien rappresentata da una V_ρ, $E^{[\rho]}$. Ad una $\gamma_{m-\rho+b}^b$ subordinata nella γ_m^ρ da $(\rho - b)$ punti fissi corrisponde un'altra V_ρ, che si ottiene nel modo seguente: ∞^b dei punti di $E^{[\rho]}$ stanno dentro quelle varietà B che corrispondono ai $(\rho - b)$ punti. Le altre $(m - \rho + b)$ varietà B per ciascun tale punto hanno per intersezione una $V_{\rho-b}$; il sistema ∞^b di queste $V_{\rho-b}$ dà la V_ρ cercata, che sarà chiamata $E^{[b]}$.

14. Ogni serie lineare $g_m^{m-\rho}$ sulla curva C viene rappresentata da una varietà razionale ad $(m - \rho)$ dimensioni; diamo il nome Σ a queste varietà. La z_b viene allora definita come *il numero delle intersezioni di una* $E^{[b]}$ (§ 13) *con una* Σ *generica*.

15. Dal fatto che ogni varietà algebrica a $(p = \rho)$ dimensioni nell'A corrisponde ad una γ_m^ρ, segue il teorema: *Se dentro la varietà* A *delle m-ple di punti di una curva di genere p, è data una varietà algebrica* E *a p dimensioni, la formola* (3) *indica quanti punti hanno a comune la* E, *la varietà a-pla dell'inviluppo del sistema* B *dei punti della curva, e* $(p - a)$ *varietà generiche* B, *dove le* z_b *sono definite nel* § 11. *Bisogna, però, che* $a \leq m - p$, *e che* $a \leq p$.

Sarebbe facile di trovare, da questo punto di vista, il significato di $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$, e quindi un'interpretazione simile della (1).

16. Se, nel caso che consideriamo $(\rho = p)$, $z_b > 0$, ma $z_{b+1} = 0$, i punti della varietà E stanno tutti in ∞^b delle Σ razionali, $\infty^{\rho-b}$ punti in ciascuna Σ; ciò segue subito dal teorema III del § 6.

17. Tutto ciò vale nell'ipotesi che $\rho = p$. Sarebbe possibile di ottenere risultati simili quando $\rho \neq p$; e anche di ottenerne altri dalla definizione delle z_b data nel § 5. Li omettiamo, però, giacchè sarebbero più complicati che interessanti.