ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

il demeure en suspens. Après avoir connu cette hésitation, Léonard de Vinci et Galilée opteront pour la seconde loi.

Dans son *Traité du ciel* où, après minutieuse discussion, il accorde, au mouvement diurne de la terre, la préférence sur le mouvement diurne du ciel, Nicole Oresme adopte, lui aussi, la dynamique de Jean Buridan. Dans un autre écrit où, précurseur de Descartes, il use sans cesse des coordonnées et formule clairement l'idée essentielle de la géométrie analytique, il se propose d'établir la loi du chemin parcouru dans un mouvement uniformément varié; la preuve qu'il en donne est cette *démonstration du triangle* que reprendront Galilée et Descartes. La règle, d'ailleurs, semble avoir été connue, à Paris et à Oxford, avant d'avoir reçu d'Oresme cette justification.

En réunissant les pensées de Buridan, d'Albert de Saxe et d'Oresme, on obtiendrait une part de la doctrine mécanique que l'on croit, communément, inventée en entier par Galilée.

Les Parisiens, d'ailleurs, n'avaient pas attendu Galilée pour faire cette synthèse.

Avant le milieu du XVI^e siècle, un de leurs élèves, le dominicain espagnol Dominique Soto, la regarde comme acquise. Partisan de la dynamique de Buridan, Soto enseigne que la chute d'un grave est uniformément accélérée; que l'ascension d'un grave est uniformément retardée et, pour évaluer le chemin parcouru dans ces mouvements, il fait usage de la règle démontrée par Oresme.

Exposer en détail les découvertes de ces précurseurs parisiens de Galilée: décrire les vicissitudes qu'elles ont éprouvées jusqu'au jour où les grands mécaniciens du XVII^e siècle en ont assuré le triomphe, c'est tout l'objet du livre dont nous offrons le respectueux hommage à l'Accademia dei Liacei.

Croyez, Monsieur le Président, à mon profond respect.

P. Duhem

Bordeaux, le 1 Octobre 1913. *Correspondant de l'Institut de France. Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.*

Matematica. — *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Nota II di Carlo Rosati, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

§ 2.

Rappresentazione del sistema di corrispondenze sui punti razionali di uno spazio lineare.

7. Enunciamo alcune semplici proprietà, di dimostrazione immediata, che avranno applicazione nel seguito.

In uno spazio lineare $S_{\mu-1}$, un punto o un iperpiano si dicono razionali quando le loro coordinate omogenee possono ridursi intere, moltiplicandole per un conveniente coefficiente di proporzionalità.

In un iperpiano razionale possono determinarsi $\mu - 1$ punti razionali linearmente indipendenti.

Un S_k di $S_{\mu-1}$ si dice razionale quando in esso possono determinarsi $k+1$ punti razionali linearmente indipendenti, o per esso possono condursi $\mu - 1 - k$ iperpiani razionali lin. indipendenti. Le due definizioni si equivalgono. Dalla prima delle quali discende che è razionale lo spazio a cui appartengono più spazî razionali; dalla seconda, che è razionale la loro intersezione.

La polarità rispetto a una quadrica a coefficienti razionali trasforma i punti razionali negli iperpiani razionali. Se una quadrica a coefficienti razionali è specializzata, il suo spazio doppio, intersezione di iperpiani razionali, è razionale.

8. Sia $(T' \, T'' \ldots T^{\mu})$ una base minima per il sistema delle corrispondenze esistenti sulla curva C. Ogni altra corrispondenza U, che non sia a valenza zero, soddisfacendo ad una relazione del tipo

$$U \equiv \lambda_1 T' + \lambda_2 T'' + \cdots \lambda_\mu T^\mu, \tag{1}$$

in cui $\lambda_1 \, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ sono interi non tutti nulli, individua nello spazio $S_{\mu-1}$ un punto razionale (di coordinate $\lambda_1 \ldots \lambda_\mu$), che diremo *immagine* della corrispondenza stessa.

Due corrispondenze fra loro dipendenti hanno la stessa immagine. Invero, se

$$V \equiv \lambda'_1 T' + \lambda'_2 T'' + \cdots + \lambda'_\mu T^\mu \tag{2}$$

è una corrispondenza dipendente da U, dalla relazione

$$rU + sV \equiv 0 \tag{3}$$

si deducono le eguaglianze

$$r\lambda_i + s\lambda'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \tag{4}$$

le quali dicono che i punti di coordinate $\lambda_i \, \lambda'_i$ coincidono. Reciprocamente, poichè dalle relazioni (1) (2) (4) si deduce la (3), si ha che due corrispondenze aventi la stessa immagine sono dipendenti.

È poi chiaro, inversamente, che *ogni* punto razionale di $S_{\mu-1}$ è immagine di infinite corrispondenze, due a due dipendenti, della curva C.

Esisterà in particolare in $S_{\mu-1}$ un punto razionale O immagine della identità e di tutte e sole le corrispondenze a valenza (n. 2). Si vede inoltre che più corrispondenze sono o no dipendenti secondochè sono o no punti linearmente dipendenti le loro immagini.

9. Date due corrispondenze $U(\alpha, \beta)$ e $V(\alpha', \beta')$ legate alla base dalle relazioni

$$(5) \qquad U \equiv \lambda_1 T' + \lambda_2 T'' + \cdots + \lambda_\mu T^\mu$$

$$(6) \qquad V \equiv \lambda'_1 T' + \lambda'_2 T'' + \cdots + \lambda'_\mu T^\mu$$

si può calcolare il loro carattere simultaneo seguendo il procedimento con cui Severi dimostra il teorema di Bezout sulla superficie F con due fasci unisecantisi (¹). Lo riproduciamo qui, per maggior chiarezza, dovendo trarne alcune conseguenze che ci saranno presto utili.

Si osservi, perciò, che le relazioni precedenti dànno origine, su F, alle equivalenze lineari

$$(7) \qquad U_x + U_y - U \equiv \lambda_1(T'_x + T'_y - T') + \lambda_2(T''_x + T''_y - T'') + \cdots$$

$$(8) \qquad V_x + V_y - V \equiv \lambda'_1(T'_x + T'_y - T') + \lambda'_2(T''_x + T''_y - T'') + \cdots ;$$

se allora seghiamo i due membri della prima con la curva V e quelli della seconda con la curva T^i $(i = 1, 2, \ldots \mu)$, e indichiamo con Ω_{UV}, Ω_{VT^i}, ω_{ik} rispettivamente i caratteri simultanei delle corrispondenze UV, VT^i, T^iT^k, si avranno le uguaglianze

$$\Omega_{UV} = \sum_i \lambda_i \, \Omega_{VT^i}$$

$$\Omega_{VT^i} = \sum_k \lambda'_k \, \omega_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu),$$

dalle quali si deduce

$$(9) \qquad \Omega_{UV} = \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \lambda_i \lambda'_k \, \omega_{ik} .$$

Supposto in particolare V coincidente con U, otterremo che il carattere di Castelnuovo della corrispondenza U è espresso dalla forma quadratica

$$\Omega = \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \lambda_i \lambda_k \, \omega_{ik} .$$

Questa forma è, per il teorema del n. 3, essenzialmente positiva; il discriminante di essa sarà dunque positivo insieme coi suoi minori principali (²). Da ciò si deduce che la quadrica avente in $S_{\mu-1}$ l'equazione

$$\Omega = \sum_{ik} \omega_{ik} \, x_i \, x_k = 0$$

(¹) Cfr. Severi, *Sulle corrispondenze* ecc. (loc. cit.), n. 18.

(²) Il discriminante di un aggruppamento $(T' T'' \ldots T^k)$ è nullo, se le corrispondenze sono dipendenti (Severi); positivo, se sono indipendenti (Castelnuovo). Applicando questa osservazione all'aggruppamento (KT) costituito dall'identità K e da una qualsiasi corrinon è specializzata e non può contenere alcun punto reale (di coordinate tutte reali).

Dalla (9) segue la proprietà:

Due corrispondenze coniugate hanno per immagine due punti coniugati rispetto alla quadrica $\Omega = 0$, *e inversamente.*

Si vede dunque che ad un aggruppamento ∞^{i-1} di corrispondenze [1] se ne può associare uno $\infty^{\mu-i-1}$ coniugato; in particolare, considerando il punto O immagine dell'identità K ed il suo iperpiano polare ω, poichè il carattere simultaneo di K e di una corrispondenza $T(\alpha, \beta)$ con u punti uniti è $\alpha + \beta - u$, si giunge alla conseguenza che *le corrispondenze nelle quali il numero dei punti uniti uguaglia la somma degl'indici, formano un aggruppamento* $\infty^{\mu-2}$.

10. Si calcoli ora il carattere simultaneo delle corrispondenze UV^{-1}. Per una proprietà che abbiamo già avuto occasione di applicare (n. 5), dalla relazione (6) si deduce l'altra

$$V^{-1} \equiv \lambda'_1 T'^{-1} + \lambda'_2 T''^{-1} + \cdots + \lambda'_\mu T^{\mu^{-1}},$$

la quale dà origine, su F, alla equivalenza lineare

$$V_x^{-1} + V_y^{-1} - V^{-1} \equiv \lambda'_1 (T_x'^{-1} + T_y'^{-1} - T'^{-1}) + \tag{10}$$
$$+ \lambda'_2 (T_x''^{-1} + T_y''^{-1} - T''^{-1}) + \cdots;$$

se allora seghiamo i due membri della (7) con la curva V^{-1} e quelli della (10) con la curva T^i $(i = 1, 2, \ldots \mu)$, e indichiamo rispettivamente con $\Omega_{UV^{-1}}$, $\Omega_{T^iV^{-1}}$, $\overline{\omega}_{ik}$ i caratteri simultanei delle corrispondenze UV^{-1}, T^iV^{-1}, $T^iT^{k^{-1}}$, si giunge alle uguaglianze

$$\Omega_{UV^{-1}} = \sum_i \lambda_i \, \Omega_{T^iV^{-1}}$$

$$\Omega_{T^iV^{-1}} = \sum_k \lambda'_k \, \overline{\omega}_{ik},$$

dalle quali si deduce

$$\Omega_{UV^{-1}} = \sum_{ik}^{1 \cdots \mu} \lambda_i \, \lambda'_k \, \overline{\omega}_{ik}. \tag{11}$$

---

spondenza $T(\alpha, \beta)$ di grado virtuale ν ed avente u punti uniti, si giunge alla disuguaglianza

$$\begin{vmatrix} 2p & \alpha + \beta - u \\ \alpha + \beta - u & 2\alpha\beta - \nu \end{vmatrix} \geq 0,$$

valendo il segno $=$ quando e soltanto quando la T è dipendente dall'identità, cioè (n. 2) è dotata di valenza. Si ottiene così l'elegante criterio di Severi che caratterizza le corrispondenze a valenza (Severi, *Sopra alcune proprietà aritmetiche* ecc.).

[1] *Aggruppamento* ∞^{i-1} significa la totalità delle corrispondenze che dipendono da i corrispondenze fra loro indipendenti.

Ed in particolare, supposto V^{-1} coincidente con U^{-1}, otteniamo che il carattere K della corrispondenza U è espresso dalla forma quadratica

$$K = \sum_{ik}^{1\dots\mu} \lambda_i \lambda_k \overline{\omega}_{ik}.$$

Se allora consideriamo in $S_{\mu-1}$ la quadrica di equazione

$$K = \sum_{ik}^{1\dots\mu} \overline{\omega}_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,,$$

la (11) dice che *due corrispondenze anticoniugate hanno per immagine due punti coniugati rispetto ad essa.*

Da ciò segue che *la quadrica* $K = 0$ *non può essere specializzata.*

Ed invero, se fosse tale, poichè la sua equazione è a coefficienti interi, il suo spazio doppio dovrebbe essere razionale (n. 7); ma allora, indicando con U una corrispondenza avente l'immagine contenuta in tale spazio, e con V una corrispondenza *qualsiasi*, le U V sarebbero anticoniugate, e quindi $U^{-1}V$ sarebbero coniugate. Seguirebbe che l'immagine di U^{-1} sarebbe un punto doppio della quadrica $\Omega = 0$.

11. Nel sistema di corrispondenze esistenti sulla curva C associamo ad ogni corrispondenza T la sua inversa T^{-1}: poichè l'inversa di ogni corrispondenza dipendente da T dipende da T^{-1}, fra i punti razionali dello spazio $S_{\mu-1}$ si viene con ciò a stabilire una corrispondenza biunivoca involutoria J, che è facile caratterizzare. Siano infatti P e P′ le immagini di T e di T^{-1}, e si consideri l'iperpiano π polare di P rispetto alla quadrica $\Omega = 0$. Poichè ogni corrispondenza avente l'immagine contenuta in π è coniugata di T e quindi anticoniugata di T^{-1}, si deduce che il punto P′ è il polo di π rispetto alla quadrica $K = 0$. Dunque: *La J è l'omografia prodotto delle due polarità rispetto alle quadriche* $\Omega = 0$ e $K = 0$.

Dal fatto che l'omografia J è involutoria, segue che le polarità su dette dovranno essere permutabili; inoltre al fascio $(\Omega\,, K)$ apparterranno due sole quadriche specializzate i cui spazî doppî $S_{\mu_1-1}\,, S_{\mu_2-1}$ $(\mu_1 + \mu_2 = \mu)$ saranno gli spazî fondamentali per la J.

Vediamo ora quali sono le quadriche specializzate del fascio $(\Omega\,, K)$.

Si osservi, perciò, che le corrispondenze aventi per immagini punti uniti dell'omografia J devono essere dipendenti dalle loro inverse, e quindi ad esse equivalenti o residue. Allora, poichè le corrispondenze $T + T^{-1}$ e $T - T^{-1}$ sono l'una equivalente, l'altra residua della sua inversa, si deduce che le loro immagini sono i punti M N in cui la congiungente PP′ incontra gli spazî fondamentali $S_{\mu_1-1}\,, S_{\mu_2-1}$: queste intersezioni dovranno perciò essere punti razionali. Ma abbiamo visto (n. 6) che per la prima i caratteri Ω K hanno uguali valori, per la seconda hanno valori contrarî; dunque M appartiene alla quadrica $\Omega - K = 0$ ed N alla quadrica $\Omega + K = 0$. E siccome i punti *razionali* M, N non possono appartenere alla quartica base del fascio (Ω, K), perchè $\Omega = 0$ non contiene alcun punto reale, si deduce che $\Omega - K = 0$ ed $\Omega + K = 0$ *sono le quadriche specializzate del fascio che hanno per spazî doppi* $S_{\mu_1 - 1}$ ed $S_{\mu_2 - 1}$.

Di qui discende che $S_{\mu_1 - 1}$ ed $S_{\mu_2 - 1}$, come spazî doppî di quadriche a coefficienti interi, sono razionali (n. 7); e che le corrispondenze le cui immagini sono contenute nel primo, avendo uguali i caratteri Ω e K, sono equivalenti alle loro inverse, mentre quelle che hanno le immagini nel secondo sono residue delle loro inverse.

Si possono allora assegnare due semplici significati ai numeri μ_1 e μ_2. Indicando con h, k le caratteristiche dei determinanti $|\omega_{ik} - \overline{\omega}_{ik}|$ ed $|\omega_{ik} + \overline{\omega}_{ik}|$, sarà manifestamente $\mu_1 = \mu - h$, $\mu_2 = \mu - k$; e poichè è $\mu_1 + \mu_2 = \mu$, si deduce $\mu_1 = k$, $\mu_2 = h$. Dunque: *Le caratteristiche dei determinanti* $|\omega_{ik} + \overline{\omega}_{ik}|$ $|\omega_{ik} - \overline{\omega}_{ik}|$ *indicano quante sono le corrispondenze indipendenti che sono rispettivamente equivalenti o residue delle loro inverse.*

Osservazione 1ª. — Una corrispondenza simmetrica (coincidente con la sua inversa) ha l'immagine contenuta in $S_{\mu_1 - 1}$. Reciprocamente, fra le infinite corrispondenze aventi per immagine un punto M di $S_{\mu_1 - 1}$, ne esistono delle simmetriche: abbiamo infatti visto che se T è una qualsiasi corrispondenza la cui immagine è nello spazio razionale $S_{\mu_2} \equiv (M\, S_{\mu_2 - 1})$, la corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$ ha per immagine il punto M. Da ciò segue che μ_1 *rappresenta il numero base delle corrispondenze simmetriche.*

Osservazione 2ª. — Il punto O, immagine dell'identità e di ogni corrispondenza a valenza, è situato in $S_{\mu_1 - 1}$. Applicando allora allo spazio razionale $S_{\mu_2} \equiv (O S_{\mu_2 - 1})$ la considerazione precedente, si giunge alla proprietà: *Le corrispondenze indipendenti che aggiunte alle loro inverse dànno origine a corrispondenze dotate di valenza, sono in numero di* $\mu_2 + 1$.

Osservazione 3ª. — Il caso $\mu_1 = 1$, in cui la J è un'omologia armonica col centro in O, dà la proprietà: *Se le corrispondenze simmetriche di una curva sono tutte a valenza, ogni corrispondenza in cui il numero dei punti uniti uguaglia la somma degli indici è residua della inversa; e reciprocamente.*

Ciò vale in particolare per le curve ellittiche (singolari), in cui la J è un'involuzione ordinaria sopra una retta (Severi).