ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulle varietà di Jacobi.* Nota II di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In questa Nota espongo dapprima alcune osservazioni sulle varietà di Jacobi, strettamente connesse a due miei lavori precedenti [1]. Assegno poi una formula sulle curve tracciate entro una varietà di Jacobi a moduli generali [2].

§ 1. — Osservazioni sulle varietà di Jacobi.

1. Data in una varietà Picardiana V_p una curva $\overline{C}$ di genere > 1, applicando ad essa tutte le trasformazioni di 1ª specie di V_p, si ha un sistema ∞^p di curve C, tale che da ogni punto di V_p ne escono ∞^1. Questo sistema di curve può essere transitivo ovvero ripartirsi in ∞^{p-i} sistemi ∞^i transitivi, situati su varietà Picardiane V_i di una congruenza di indice 1: nel primo caso le C *appartengono* a V_p; nel secondo appartengono alle dette V_i (cfr. M, n. 6). Orbene, la prima osservazinne che vogliamo fare è questa: si possono distinguere i due casi a seconda del comportamento che presentano le C uscenti da un punto. Si ha cioè il seguente criterio:

I. *Se, preso un punto* $\overline{P}$ *di* V_p, *il cono* $\overline{K}$ *delle tangenti alle* C *uscenti da* $\overline{P}$ *appartiene allo spazio* $\overline{S}_p$ *tangente in* $\overline{P}$ *a* V_p, *lo stesso avviene in ogni altro punto, e le* C *appartengono a* V_p. *Se invece* $\overline{K}$ *appartiene a uno spazio* $\overline{S}_i$ *con* $i < p$, *lo stesso avviene in ogni altro punto, e le* C *appartengono a varietà Picardiane* V_i.

È chiaro, intanto, che se le C appartengono a varietà Picardiane V_i ($i < p$), in ogni punto P le tangenti alle C da esso uscenti sono contenute nello spazio S_i tangente in P alla V_i che passa per P.

Supponiamo ora, inversamente, che il cono $\overline{K}$ delle tangenti alle C uscenti da un certo punto $\overline{P}$ appartenga a uno spazio $\overline{S}_i$ ($i < p$). Poichè le C uscenti da un punto *qualunque* P possono ottenersi applicando a quelle uscenti da $\overline{P}$ la trasformazione di 1ª specie che porta $\overline{P}$ in P, segue che il cono K delle tangenti alle C che escono da P appartiene a uno spazio S_i

[1] *Sulle serie algebriche* ecc. [Rend. Pal., tom. XXXVII (1914)]; *Sulle varietà di Jacobi* [Questi Rend., vol. XXII (1913)]. Designerò questi due lavori, rispettivamente, coi simboli M, N.

[2] Nell'enunciato del n. 7 è specificato in che senso va intesa *nel presente lavoro* la generalità dei moduli. La legittimità della frase, ammessa tacitamente finora, è stata testè rigorosamente provata dal Severi (Comptes rendus, 27 janvier 1913).

univocamente determinato da P (e contenuto nello spazio S_p tangente a V_p in P). Tutti gli S_i così ottenuti saranno allora gli S_i tangenti alle varietà V_i di un certo sistema ∞^{p-i} di indice 1; e ogni C è contenuta in una V_i. Le V_i risulteranno allora varietà Picardiane.

Dalle considerazioni fatte segue la verità dell'enunciato.

2. La varietà Jacobiana V_p, imagine della g_p di una curva C_p del genere p, contiene un sistema ∞^1, Σ, di varietà W_{p-1} imagini dei punti di C_p (ossia delle g_p individuate dalle p-ple di punti con un punto fisso). Il sistema Σ ammette come varietà base la varietà w_{p-2} imagine delle g_p speciali. Intorno a questa varietà w_{p-2}, conviene tener presente le seguenti osservazioni:

a) Consideriamo per un momento le ∞^ϱ varietà $W_{p-\varrho}$ imagini delle g_ϱ di C_p $(1 \leqq \varrho \leqq p-2)$, ossia delle g_p individuate dalle p-ple con ϱ punti fissi; e osserviamo che *una* $W_{p-\varrho}$ *non può contenere una congruenza d'indice* 1 *di varietà Picardiane* V_i. Le V_i infatti sarebbero varietà di livello costante per $p-i$ integrali di 1ª specie indipendenti di quella $W_{p-\varrho}$, quindi per $p-i$ integrali indipendenti di 1ª specie di V_p. Allora entro V_p esisterebbe una congruenza di indice 1 di varietà Picardiane ∞^i; le V_i sarebbero varietà di questa congruenza; e tutte le $W_{p-\varrho}$ apparterrebbero ad essa: il che è assurdo [1]. Poichè la varietà w_{p-2}, di cui si parlava poco fa, è bir. identica alle W_{p-2}, concludiamo che se V_p possiede una congruenza di indice 1 di varietà Picardiane V_i $(i < p-2)$, la w_{p-2} non può appartenere a tale congruenza. Si noti poi che, se $i > 1$, le V_i segano la w_{p-2} in varietà V_{i-2} che, com'è facile vedere, non possono essere multiple; ne segue adunque:

II. *Se* V_p *possiede una congruenza d'indice* 1 *di varietà Picardiane* V_i, *la* w_{p-2} (*non può essere contenuta in una* V_i *se* $i \geqq p-e$) *non può appartenere alla congruenza se* $i < p-2$. *Inoltre, in un punto generico della* w_{p-2} *l'* S_{p-2} *ad essa tangente e l'* S_i *tangente alla* V_i *passante per quel punto hanno comune un* S_{i-2} *se* $i > 1$ (*quel punto, se* $i = 1$), *e non uno spazio più ampio.*

b) Abbiam detto che la w_{p-2} è imagine delle g_p speciali. Precisamente: preso un suo punto generico P, e detti S_p, S_{p-2} gli spazí tangenti in esso alla V_p e alla w_{p-2}, esistono p varietà W_{p-1} di Σ tangenti in P

[1] Si può anche dimostrare per via algebrica la proprietà in questione, osservando che se una varietà V possiede una congruenza di indice 1 di varietà aventi il sistema canonico di ordine zero, il sistema canonico di V, se esiste ed è di ordine > 0, è composto colla congruenza; e ricordando la costruzione che il Severi dà, *sulla curva* C_p, del sistema canonico di una $W_{p-\varrho}$ (questi Rendiconti, vol. XX, pag. 541). Da tal costruzione infatti, mediante una formula del Comessatti (Atti Istituto Veneto, tom. LXIX), facilmente si trae che il sistema canonico di una $W_{p-\varrho}$ ha il grado effettivo > 0.

ad un qualunque S_{p-1} del fascio (S_p, S_{p-2}); questa p-pla di varietà di Σ è l'imagine di un gruppo della g_p^1 rappresentata da P. Così:

III. *Ai gruppi della g_p^1 rappresentata da* P *sono associati proiettivamente gli* S_{p-1} *del fascio* (S_p, S_{p-2}). *Una curva* γ *uscente da* P, *e non tangente ivi alla* w_{p-2}, *è immagine di una serie* ∞^1 *d'ordine* p *di* C_p, *la quale si scinde nella* g_p^1 *rappresentata da* P, *e in un'altra serie. Quest'ultima ha a comune colla detta* g_p^1 *il gruppo associato all'* S_{p-1} *individuato dallo spazio* S_{p-2} *e dalla tangente in* P *a* γ.

3. Data nella varietà Jacobiana V_p una curva $\overline{\gamma}$ di genere >1, applichiamo ad essa tutte le trasformazioni di 1ª specie che portano un punto qualunque di $\overline{\gamma}$ in un punto P fissato genericamente sulla w_{p-2}. Otterremo così ∞^1 curve γ uscenti da P; ognuna di esse è imagine di una serie di ordine p di C_p, la quale si decompone nella g_p^1 rappresentata da P e in un'altra serie γ_p^1, avente un gruppo Γ a comune colla detta g_p^1. Ora domandiamoci: il gruppo Γ varia al variare della γ? Si vede subito che la risposta è affermativa, e cioè

IV. *Dato un qualunque gruppo della* g_p^1, *esistono sempre serie* γ_p^1 *che lo contengono.*

E infatti, detti al solito S_p, S_{p-2} gli spazî tangenti in P alle varietà V_p, w_{p-2}, e detto K il cono costituito dalle tangenti in P alle γ, un S_{p-1} variabile del fascio (S_p, S_{p-2}) sega K in generatrici che non possono essere tutte fisse (contenute cioè in S_{p-2}): ciò per la proprietà I, se $\overline{\gamma}$ appartiene a V_p; per la II, se $\overline{\gamma}$ appartiene a una varietà Picardiana meno ampia. Allora dalla proprietà III segue subito la verità dell'asserto (¹).

§ 2. — Sulle curve tracciate entro una varietà Jacobiana a moduli generali.

4. Fra due curve sovrapposte C_p, C'_p abbiasi una corrispondenza T di indici α, β. Il gruppo dei β punti di C'_p omologhi di un punto variabile di C_p descrive una serie γ_β^1 biraz. identica a una certa involuzione, d'ordine $\varepsilon \geqq 1$, di C_p (²); l'indice di γ_β^1 vale $\frac{\alpha}{\varepsilon}$.

(¹) In questa involuzione sono coniugati due punti se, e solo se, hanno in T uno stesso gruppo di gruppi omologhi. Se T ha valenza $\gamma \neq 0$, è certo $\varepsilon = 1$: com'è facile vedere.

(²) La proprietà in questione è applicata in N, al n. 5. Avverto che in N, a pag. 101, rigo 13° dal basso, bisogna dire così: Esistono ∞^1 serie $\gamma_p^\star$ specializzate di $\Sigma_p^\star$, ciascuna delle quali contiene un gruppo della g_p^1 individuata dalla detta p-pla; prendiamone una, $\overline{\gamma}_p^\star$, contenente appunto la detta p-pla; siano $A_1 A_2 \ldots A_h$ i suoi punti fissi; ecc.

Chiamando omologhi due punti quando sono contenuti in uno stesso gruppo della γ_β^1, si ha su C_p una corrispondenza simmetrica Θ, di indici $\frac{\alpha}{\varepsilon}(\beta-1)$. Orbene, è facile vedere che *se* T *ha la valenza* γ, Θ *ha la valenza* $\frac{\alpha-\gamma^2}{\varepsilon}$. Ne segue che

Se T *ha la valenza* γ, *essa possiede, su* C_p, $2\alpha(\beta+p-1)-2\gamma^2 p$ *punti di diramazione.*

Osservazione. — La molteplicità di un punto di diramazione di C_p è data dal numero dei punti doppi contenuti nel corrispondente gruppo della γ_β^1.

Supponiamo, per es., che tra i gruppi della γ_β^1 passanti per un certo punto P′ di C'_p ve ne sian due coincidenti in uno G′, e che per G′ il punto P′ sia doppio Allora P′ conta per *due* punti doppi della serie γ_β^1, e quindi ogni punto di C_p avente G′ come gruppo di punti omologhi in T è un punto di diramazione *doppio* per T.

5. Sopra una curva C_p abbiasi una serie $\gamma_n^1[\nu\pi z]$, priva di punti multipli variabili. Chiamando omologhi due punti allorquando sono contenuti in uno stesso gruppo di γ_n^1, si ha una corrispondenza simmetrica T di indici $\nu(n-1)$: se questa ha valenza γ, diremo che la serie γ_n^1 *è a valenza* γ. Di una serie $\gamma_n^1[\nu\pi z]$ a valenza si possono subito notare due proprietà:

A) *La valenza* γ *non può superare l'indice* ν; *e posto* $\gamma=\nu-\omega$, *si ha* $z=\omega p (\omega \geq 0)$. Ciò risulta subito dal confronto delle due espressioni

$$2\nu(n+p-1)-2z \quad , \quad 2\nu(n-1)+2\gamma p$$

che dànno entrambe il numero dei punti doppî di γ_n^1: l'una, in virtù di una nota formula di Schubert; l'altra, in virtù del principio di corrispondenza di Cayley-Brill.

B) *Se* $\omega>0$, *nessun integrale di* 1ª *specie di* C_p *può dare somma costante lungo i gruppi di* γ_n^1; *quindi deve essere* $\pi \geqq p$, *e* γ_n^1 *non può essere composta con una involuzione* (*irrazionale*).

6. Sopra una curva C_p abbiasi una serie $\gamma_n^1[\nu\pi z]$ a valenza $\nu-\omega$, dotata di punti doppi e di diramazione in numero finito; e siano anche in numero finito x le coppie di punti comuni a due gruppi di essa serie. Proponiamoci di calcolare il numero x.

Per questo, consideriamo la corrispondenza simmetrica T nella quale sono omologhi due punti allorquando appartengono a uno stesso gruppo di γ_n^1. Pel numero dei punti di diramazione di T troviamo due espressioni. L'una è, secondo il n. 4,

$$2\nu(n-1)[\nu(n-1)+p-1]-2(\nu-\omega)^2 p.$$

L'altra espressione si ha osservando che i punti di diramazione della corrispondenza T provengono:

1°) dai punti di diramazione della serie γ_n^1: ognuno di questi è punto di diramazione $(n-1)$-plo per T;

2°) dai gruppi di γ_n^1 dotati di punto doppio: i rimanenti $n-2$ punti di un tal gruppo sono punti di diramazione semplici per T;

3°) dalle x coppie di punti comuni a due gruppi della γ_n^1: ogni punto di una tal coppia è punto di diramazione doppio per T (ved. n. 4, Osserv.).

Troviamo così pel numero dei punti di diramazione di T anche l'espressione

$$(n-1)[2n(\nu+\pi-1)-2\omega p]+$$
$$+(n-2)[2\nu(n+p-1)-2\omega p]+4x\,.$$

Paragonando le due espressioni trovate, si ha la formula

$$2x+n(n-1)\pi-(2n-3)\omega p+(\nu-\omega)^2 p-\nu p+ \tag{1}$$
$$+(n-1)[n(\nu-1)+\nu(n-1)-\nu^2(n-1)]=0\,.$$

Mediante questa formula si potrebbe ad esempio ritrovare quella che dà il genere della serie costituita dalle coppie di punti omologhi in una corrispondenza a valenza.

7. Si supponga ora che sia $n=p$, e che la serie data sia priva di gruppi speciali [1]: talchè sarà $\nu=\omega p$ (cfr. M, § 1). La formula precedente diviene allora

$$\nu^2(p-1)^3-2p(p-1)(p-2)\nu-p^2(p-1)(\pi-1)-2xp=0. \tag{2}$$

Possiamo così enunciare il seguente teorema:

Entro la varietà Jacobiana V_p *di una curva* C_p *priva di corrispondenze simmetriche singolari, si abbia una curva* γ *di genere* π, *non appoggiata alla* w_{p-2} *imagine delle* g_p *speciali, nè appartenente all'inviluppo delle* W_{p-1} *imagini dei punti di* C_p. *Se* ν *è il numero dei punti in cui* γ *incontra le* W_{p-1}, *e* x *il numero, supposto finito, delle varietà comuni a due di tali* W_{p-1} *e che bisecano la* γ, *tra i caratteri nominati intercede la relazione* (2).

Se $p=2$, il numero x rappresenta il numero dei punti doppi della curva γ. Tenendo poi presente che il numero base di V_2 vale 1 (Severi), facilmente si vede che il grado virtuale di γ vale $\frac{1}{2}\nu^2$; e la (2) si riduce allora ad esprimere che il carattere d'immersione di γ è nullo.

[1] Quindi di punti fissi: cfr. N, n. 1. Parlando di serie di un dato ordine, si sottintende, salvo avviso contrario, che non abbia punti fissi.