ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del **1913.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti.* Nota del Socio Vito Volterra [1].

1. Ho avuto già occasione di trattare questo stesso soggetto in un'altra Nota pubblicata in questi Rendiconti, nella quale ho considerato le equazioni della forma

$$\sum_{1}^{p}{}_{i} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots x_p | t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_{1}^{p}{}_{i} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots x_p | \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0$$

in cui le funzioni $f_i(t, \tau)$ sono permutabili di 2ª specie e, dopo aver stabilito in generale il teorema di reciprocità analogo a quello di Green, ho più specialmente esaminato il caso in cui $p > 2$ è pari, che è il più semplice [2]. Nel caso di p dispari, nel quale non può applicarsi il principio del passaggio da soluzioni rapporti di funzioni intere di equazioni differenziali alle soluzioni pure rapporti di funzioni intere delle equazioni integro-differenziali correlative, si può far uso di un metodo analogo a quello impiegato nel

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1913.

[2] *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Seduta del 22 gennaio 1911. Ho pure considerato equazioni integro-differenziali con limiti costanti nelle Note: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 20 febbraio 1910; *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 6 agosto 1911. L'anno scorso nelle mie lezioni alla Sorbona ho mostrato come quelle a nuclei simmetrici possano ricavarsi da questioni di calcolo delle variazioni.

§ 5 dell'altra mia Nota avente per titolo: *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie* (¹).

Mi permetto qui di trattare il caso di $p=3$ (giacchè gli altri casi di p dispari non offrono diversa difficoltà) cioè l'equazione

$$\text{(I)}\qquad \Delta^2 u(t)+\int_0^1\left\{\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0$$

nella quale, per semplicità, ho soppresso di scrivere esplicitamente le variabili x, y, z da cui dipende la funzione u.

2. Tutto sta nel trovare una soluzione fondamentale di quella equazione che ho chiamato aggiunta della (I), la quale non differisce da essa che per una semplice trasposizione delle variabili t e τ in $f(t,\tau)$, $\varphi(t,\tau)$, $\psi(t,\tau)$ [2]. Basterà dunque dare un metodo per trovare una soluzione fondamentale della (I).

Supponiamo f, φ, ψ permutabili di 2ª specie, e consideriamo dapprima l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1+z_1)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1+z_2)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(1+z_3)=0\,.$$

La sua soluzione fondamentale sarà

$$\frac{c}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1+z_1}+\dfrac{y^2}{1+z_2}+\dfrac{z^2}{1+z_3}}}=$$

$$=\frac{c}{r}\sqrt{\frac{1+(z_1+z_2+z_3)+(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)+z_1z_2z_3}{1+\alpha^2(z_2+z_3)+\beta^2(z_3+z_1)+\gamma^2(z_1+z_2)+\alpha^2z_2z_3+\beta^2z_3z_1+\gamma^2z_1z_2}}$$

ove c è una costante e

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad \alpha=\frac{x}{r}\ ,\quad \beta=\frac{y}{r}\ ,\quad \gamma=\frac{z}{r}\,.$$

Cominciamo dal costruire le funzioni

$$f+\varphi+\psi+\ddot{\varphi}\ddot{\psi}+\ddot{\psi}\ddot{f}+\ddot{f}\ddot{\varphi}+\ddot{f}\ddot{\varphi}\ddot{\psi}=\lambda(t,\tau)$$

$$\alpha^2(\varphi+\psi)+\beta^2(\psi+f)+\gamma^2(f+\varphi)+\alpha^2\ddot{\varphi}\ddot{\psi}+\beta^2\ddot{\psi}\ddot{f}+\gamma^2\ddot{f}\ddot{\varphi}=\mu(t,\tau)$$

ove i doppî asterischi segnati sulle lettere f, φ, ψ denotano che le opera-

(¹) Seduta del 23 aprile 1911.

(²) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti*, § 2.

zioni sopra esse eseguite non sono moltiplicazioni, ma composizioni di seconda specie (¹).

Determiniamo quindi la funzione $\nu(t, \tau)$ tale che

$$\frac{1 + \ddot{\lambda}}{1 + \ddot{\mu}} = 1 + \nu,$$

ossia in modo che

$$\lambda = \mu + \nu + \ddot{\mu}\ddot{\nu}.$$

Essa si otterrà risolvendo l'equazione integrale

$$\lambda(t, \tau) - \mu(t, \tau) = \nu(t, \tau) + \int_0^1 \mu(t, \xi)\, \nu(\xi, \tau)\, d\xi.$$

Basterà ora considerare l'equazione integrale di 2° grado

$$\sqrt{1 + \ddot{\nu}} = 1 + \pi,$$

cioè

$$1 + \nu = (1 + \ddot{\pi})^2,$$

ossia

$$\nu = 2\pi + \ddot{\pi}^2,$$

che può scriversi

$$\nu(t, \tau) = 2\pi(t, \tau) + \int_0^1 \pi(t, \xi)\, \pi(\xi, \tau)\, d\xi$$

e, se ci riesce ad ottenere $\pi(t, \tau)$ permutabile, insieme alle sue derivate rispetto a x, y, z, con f, φ, ψ, sarà

$$\text{(II)} \qquad \frac{F(t) + \int_0^1 F(\tau)\, \pi(t, \tau)\, d\tau}{r}$$

la soluzione fondamentale richiesta, ove $F(t)$ è una funzione arbitraria di t, indipendente da x, y, z.

(¹) Ho adottato qui gli asterischi, invece dei punti di cui avevo fatto uso nelle Note precedenti.

3. Noi faremo uso adesso del metodo delle sostituzioni permutabili applicato nella Nota precedentemente citata [1]. Abbiasi la sostituzione

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{vmatrix} = T^{-1} \begin{vmatrix} A_1, 0, 0, \dots 0 \\ 0, A_2, 0, \dots 0 \\ 0, 0, A_3, \dots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, 0, \dots A_g \end{vmatrix} T \text{ [2]},$$

ove T è una sostituzione a determinante diverso da zero e

$$A_i = \begin{vmatrix} a_i, 0, 0, \dots 0 \\ a_i', a_i, 0, \dots 0 \\ a_i'', a_i', a_i, \dots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_i^{(h_i)}, a_i^{(h_i-1)}, a_i^{(h_i-2)}, \dots a_i \end{vmatrix}, \quad (h_1 + h_2 + \dots + h_g = n).$$

Noi denoteremo con B, C, L, M, ... delle sostituzioni perfettamente analoghe alla A in cui però le $a_{is}, a_i, a_i', a_i'', \dots A_i, \dots$ sono respettivamente sostituite dalle lettere $b_{is}, b_i, b_i', b_i'', \dots B_i, \dots$, oppure $c_{is}, c_i, c_i', c_i'', \dots C_i, \dots$ ecc., rimanendo la stessa la sostituzione T e non alterandosi i numeri $h_1, h_2, h_3, \dots h_g$. Tutte le sostituzioni A, B, C, ... saranno fra loro permutabili e le funzioni

$$f = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\varphi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s b_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\psi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s c_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

ove $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots \alpha_n(t)$ sono funzioni normalizzate, saranno permutabili fra loro.

Noi prenderemo le funzioni f, φ, ψ della equazione (I) date dalle espressioni precedenti, supponendo le T, A_i, B_i, C_i indipendenti da x, y, z.

[1] *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie.*

[2] Secondo una notazione di cui ho fatto uso in altri miei lavori questa sostituzione può scriversi ancora $T^{-1} \overline{\left\{ \prod_1^g A_i \right\}} T$.

È evidente allora che avremo

$$\lambda = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, l_{rs} \quad \alpha_r(t)\,\alpha_s(\tau)$$

$$\mu = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, m_{rs}\, \alpha_r(t)\,\alpha_s(\tau)$$

$$\nu = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, n_{rs}\, \alpha_r(t)\,\alpha_s(\tau)$$

$$\pi = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, \alpha_r(t)\,\alpha_s(\tau)$$

e fra le sostituzioni corrispondenti passeranno le relazioni

$$A_i + B_i + C_i + B_i C_i + C_i A_i + A_i B_i + A_i B_i C_i = L_i$$

$$\alpha^2(B_i + C_i) + \beta^2(C_i + A_i) + \gamma^2(A_i + B_i) + \alpha^2 B_i C_i + \beta^2 C_i A_i + \gamma^2 A_i B_i = M_i$$

$$(1 + L_i)(1 + M_i)^{-1} = 1 + N_i\,,$$

ove con 1 si rappresenta la sostituzione identica, cioè

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

In altri termini

$$1 + N_i = \left[\alpha^2(1 + A_i)^{-1} + \beta^2(1 + B_i)^{-1} + \gamma^2(1 + C_i)^{-1}\right]^{-1}.$$

Finalmente sarà

$$N_i = 2P_i + P_i^2$$

ossia

$$(1 + P_i)^2 = 1 + N_i\,.$$

4. È facile con semplici operazioni algebriche calcolare gli elementi delle sostituzioni P_i. Infatti posto dapprima

$$\alpha^2(1 + A_i)^{-1} + \beta^2(1 + B_i)^{-1} + \gamma^2(1 + C_i)^{-1} = 1 + Q_i\,,$$

si avrà

$$1 + q_i = \frac{\alpha^2}{1+a_i} + \frac{\beta^2}{1+b_i} + \frac{\gamma^2}{1+c_i}$$

$$q_i' = -\frac{a_i' \alpha^2}{(1+a_i)^2} - \frac{b_i' \beta^2}{(1+b_i)^2} - \frac{c_i' \gamma^2}{(1+c_i)^2}$$

$$q_i'' = \alpha^2\left(-\frac{a_i''}{(1+a_i)^2} + \frac{a_i'^2}{(1+a_i)^3}\right) +$$

$$+ \beta^2\left(-\frac{b_i''}{(1+b_i)^2} + \frac{b_i'^2}{(1+b_i)^3}\right) + \gamma^2\left(-\frac{c_i''}{(1+c_i)^2} + \frac{c_i'^2}{(1+c_i)^3}\right)$$

. . . .

quindi

$$1 + n_i = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{1+a_i} + \frac{\beta^2}{1+b_i} + \frac{\gamma^2}{1+c_i}}$$

$$n_i' = -\frac{q_i'}{(1+q_i)^2}$$

$$n_i'' = -\frac{q_i''}{(1+q_i)^2} + \frac{q_i'^2}{(1+q_i)^3}$$

. . . .

Finalmente

$$1 + p_i = \sqrt{1+n_i} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\alpha^2}{1+a_i} + \frac{\beta^2}{1+b_i} + \frac{\gamma^2}{1+c_i}}}$$

$$p_i' = \frac{n_i'}{2\sqrt{1+n_i}}$$

$$p_i'' = \frac{1}{2\sqrt{1+n_i}}\left(n_i'' - \frac{n_i'^2}{4(1+n_i)}\right)$$

. . . .

Basterà dunque che siano

$$1 + a_i \,,\; 1 + b_i \,,\; 1 + c_i > 0$$

perchè le $p_i, p_i', p_i'', \ldots$ *possano senz'altro ottenersi, ed esse saranno determinate prendendo positivi tutti i radicali che figurano nelle formule precedenti.*

Da queste quantità possono ricavarsi le p_{is}, quindi π ed è evidente che essa e le sue derivate rispetto a x, y, z saranno permutabili con f, φ, ψ.

La soluzione fondamentale (II) assumerà quindi la forma

$$\frac{F(t)+\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s\, p_{is}\, k_s\, \alpha_i(t)}{r},$$

ove

$$k_s=\int_0^1 \alpha_s(\tau)\, F(\tau)\, d\tau\,,$$

onde il problema propostoci sarà risoluto.

Si può esaminare abbastanza facilmente la estensione al caso di $n=\infty$.

Patologia vegetale. — *Ancora sulla « morìa del castagno (mal dell'inchiostro) » in risposta al sig. dott. L. Petri.* Nota del Socio Giovanni Briosi e di Rodolfo Farneti.

Rispondendo a due Note del sig. dott. Lionello Petri, pubblicate nei Rendiconti di codesta R. Accademia, noi criticavamo il suo modo di vedere sopra l'eziologia del *Male dell'inchiostro* dei castagni e specialmente il fatto di ritenere egli che la malattia si dovesse ad una infezione della regione del *colletto* e delle grosse radici, prodotta, secondo l'autore, dall'*Endothia radicalis*, come combattevamo la affermazione che il *Coryneum* che noi avevamo sperimentalmente dimostrato essere la causa del male, invece non vi prendesse parte, o solo in via affatto secondaria.

Il dott. Petri ora [1], risponde in una nuova Nota, che è « assolutamente « arbitrario il volergli attribuire l'opinione che il *Male dell'inchiostro* sia « prodotto dall' *Endothia radicalis* ».

« L'aver trovato », dice egli « che l' *Endothia radicalis*, sviluppandosi « alla base del tronco o anche sulle grosse radici, può precedere il *Coryneum* « e favorirne anzi l'attacco sulla chioma dell'albero, ciò non equivale ad « affermare essere l' *Endothia* la causa della malattia. Una simile affermazione sarebbe in aperta contraddizione coi risultati delle mie stesse ricerche ».

Per certo non è sempre facile cogliere il pensiero ultimo e sicuro di questo autore che talora divaga e spesso sembra indeciso, ma noi abbiamo proceduto colla massima sincerità e crediamo di non aver errato; poichè abbiamo riportato le sue stesse parole, trascrivendo lunghissimi brani del suo

(1) *Considerazioni critiche sulla malattia del castagno detta dell'inchiostro.* Atti Acc. Lincei. Rendiconti, vol. XXII, fasc. 7°.