# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXII.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

un liquido oleoso e alquanta materia rossastra amorfa. Aprendo i matracci, si notò aspirazione.

Il prodotto venne distillato con vàpore per eliminare il toluolo e la naftalina, rimasti inalterati, nonchè l'acido benzoico. Il liquido acquoso che restò indietro, liberato, per filtrazione, della parte resinosa in esso sospesa, aveva una reazione marcatamente acida. Esaurito con etere, si ebbe un residuo in parte cristallizzato, d'un odore particolare. Purificandolo dall'acqua col nero animale, si poterono ottenere grossi cristalli senza colore, che avevano tutte le proprietà dell'*acido ftalico*. Il loro punto di fusione, 195°, si mantenne inalterato per aggiunta di acido ftalico autentico.

Dall'esperienza or descritta si vede pertanto che in queste condizioni la naftalina si ossida profondamente alla luce: resta ancora da accertare quali siano i prodotti che accompagnano l'acido ftalico.

In fine ricordiamo con gratitudine l'aiuto prestatoci dal sig. Emilio Sernagiotto.

## Meccanica. — *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida.* Nota del Corrisp. E. Almansi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## Meccanica. — *Efflusso da un recipiente forato sul fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un recipiente a sezione rettangolare [fig. 1]. Un liquido pesante, in esso contenuto, effluisce attraverso un foro piccolissimo O, praticato nel mezzo del fondo. Più precisamente, si immagini il foro O messo in comunicazione dall'esterno, con una pompa aspirante, il cui regolare funzionamento assicuri un efflusso, attraverso il foro, di portata costante $q$.

Sia $\Omega$ la larghezza del recipiente, ed $H_0 > \Omega$ l'altezza iniziale del liquido sul fondo. È evidente che se l'altezza $H_0$ è abbastanza rilevante rispetto ad $\Omega$, le particelle liquide vicine allo specchio libero interno hanno, per un certo tratto, traiettorie sensibilmente verticali discendenti, e velocità eguali per tutte; si ha insomma, per quel tratto, il regime uniforme per uno strato liquido attiguo al pelo libero, il quale comincia ad abbassarsi mantenendosi orizzontale. Ma è altresì manifesto che questo stato di cose si va alquanto modificando, mano mano che lo specchio libero si abbassa: arriverà un certo momento in cui, anche a vista d'occhio, lo strato attiguo

al pelo libero va perdendo il regime uniforme, e, in particolare, la orizzontalità.

Fino a quale distanza dal fondo si può ritenere che lo specchio libero nell'interno del recipiente si abbassi orizzontalmente, con velocità costante.

*La distanza discriminante* — risponde il contenuto di questa Nota — *è sensibilmente pari alla larghezza del recipiente.*

Fintantochè il livello interno del liquido si mantiene superiore a questa quota discriminante, si riesce a caratterizzare ancora, e in modo semplice, l'andamento dei filetti liquidi in tutta la massa in moto. Si trova, in particolare, che nell'immediata prossimità del foro essi hanno lo stesso andamento delle curve delle tangenti.

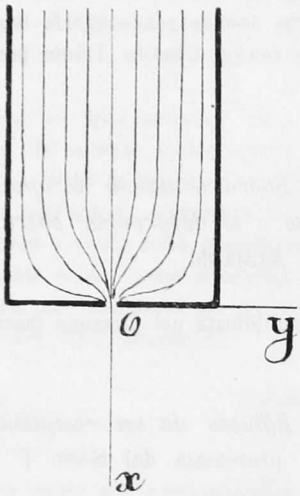


Fig. 1.

1. Giova trattare la questione in due dimensioni, e prendere le mosse dal problema seguente:

Si immaginino le pareti del recipiente estendentisi indefinitamente a monte, dimodochè il recipiente stesso sia raffigurato nel piano del moto da un rettangolo infinitamente allungato in uno dei due sensi. La massa liquida riempia completamente il recipiente, estendendosi così essa pure indefinitamente.

Un efflusso di portata costante $q$ attraverso il foro O, compensato da una corrente interna di eguale portata, proveniente dall'$\infty$ a monte, assicura un regime permanente al moto della massa liquida.

Nei numeri seguenti farò vedere che nel recipiente, a una distanza dal fondo non minore di $\Omega$, la massa fluida è sensibilmente in regime uni-

forme con velocità $\frac{q}{\Omega}$, e che a una distanza minore di $\Omega$ i filetti liquidi modificano alquanto il loro andamento rettilineo, assumendo in prossimità del foro lo stesso andamento delle curve delle tangenti.

Ciò posto, ripassando al problema originario dell'efflusso dal recipiente di una massa liquida limitata, cioè con pelo libero interno, rimane giustificato il comportamento già annunciato, quando si pensi che unica condizione imposta al pelo libero, nelle accennate circostanze, è di essere orizzontale; condizione, questa, concomitante colle conclusioni relative al moto della massa fluida indefinita, finchè si hanno da considerare strati liquidi orizzontali più alti di $\Omega$ sul fondo.

Non mi rimane ora che da giustificare il comportamento accennato, nel problema ausiliario relativo alla massa fluida indefinita.

2. Per la trattazione analitica converrà schematizzare la questione, assimilando il foro O ad una sorgente negativa puntiforme, per il liquido contenuto nel recipiente [1].

Si assuma una coppia di assi coll'origine in O, l'asse $x$ verticale discendente e l'asse $y$ diretto verso la parete che sta a sinistra di chi segue l'efflusso. Sieno $u$ e $v$ le componenti della velocità in un punto generico.

Supposto irrotazionale il moto, esistono un potenziale di velocità $\varphi(x, y)$ ed una funzione di corrente $\psi(x, y)$, entrambi armoniche e regolari nell'interno del campo occupato dal liquido e tali che

$$(1) \qquad \begin{cases} d\varphi = \phantom{-}u\,dx + v\,dy\,, \\ d\psi = -v\,dx + u\,dy\,. \end{cases}$$

Introducendo la variabile complessa $z = x + iy$, le espressioni

$$(2) \qquad f = \varphi + i\psi \quad , \quad w = u - iv$$

si presentano, per le (1), funzioni di $z$, e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$(3) \qquad \frac{df}{dz} = w\,.$$

[1] Nel *Traité de Mécanique rationelle* [Paris, Gauthier-Villars (1909), tome III, pag. 384] dell'Appell, si trova trattato come applicazione di problemi relativi alle sorgenti, il problema dell'efflusso permanente irrotazionale di un liquido dal fondo di un vaso indefinito limitato da due piani paralleli, normali al fondo. È appunto la questione che ci occupa. L'A. tratta il problema nello spazio, e del potenziale di velocità dà una rappresentazione in serie. Da essa non è agevole ricavare l'andamento dei filetti liquidi interni al vaso. Vedremo come, limitando la questione nel piano, tutti gli elementi del moto si possono esprimere in termini finiti, ed in modo semplice, in funzione del punto generico del campo nel moto, e, in particolare, ricavare con tutta comodità la distribuzione dei filetti liquidi.

Le condizioni al contorno ed all'infinito, imposte alle componenti $u$ e $v$ della velocità, sono manifestamente le seguenti:

$$
(4)\quad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sul fondo} \quad \left(x = 0 \ \text{ e } \ -\dfrac{\Omega}{2} \leq y \leq +\dfrac{\Omega}{1}\right), \\ v = 0 \quad \text{sulle pareti} \ \left(x \leq 0 \ \text{ e } \ y = \pm\dfrac{\Omega}{2}\right), \\ \lim\limits_{x=-\infty} u = \dfrac{q}{\Omega}, \\ \lim\limits_{x=-\infty} v = 0 . \end{cases}
$$

3. Si soddisfa a tutte queste condizioni, ponendo

$$
(5)\qquad w = -\frac{q}{\Omega} \coth \frac{\pi z}{\Omega} .
$$

Infatti, scrivendo, in questa, $x + iy$ al posto di $z$, e separando la parte reale dalla immaginaria, si ha

$$
(6)\quad \begin{cases} u = \dfrac{q}{\Omega} \dfrac{\operatorname{senh} \dfrac{2\pi x}{\Omega}}{\cos \dfrac{2\pi y}{\Omega} - \cosh \dfrac{2\pi x}{\Omega}}, \\ v = \dfrac{q}{\Omega} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{2\pi y}{\Omega}}{\cos \dfrac{2\pi y}{\Omega} - \cosh \dfrac{2\pi x}{\Omega}}, \end{cases}
$$

le quali espressioni soddisfanno alle (4), come è facile verificare.

Osservazione. — Tanto da (5), quanto da (6), risulta che nel foro $O(z = 0)$ la velocità diviene infinita. Circostanza prevedibile, questa, avendo fino da principio assimilato il foro O ad una sorgente puntiforme. Dal punto di vista fisico basta considerare il movimento fino ad una certa distanza (abbastanza piccola, del resto) dal foro O. Nella regione attigua ad O il movimento, in realtà, si modifica alquanto, perchè non può darsi che la velocità diventi infinita, come le considerazioni analitiche farebbero prevedere. Tuttavia, l'ipotesi schematica della sorgente puntiforme non deve verosimilmente scostarsi di troppo dalla realtà per quanto riguarda l'andamento generale dei filetti liquidi, che ora passerò a considerare.

4. La (3), per la (5), integrata dà, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$f = -\frac{q}{\Omega} \log \operatorname{senh} \frac{\pi z}{\Omega} . \tag{7}$$

Da questa, ponendo $z = x + iy$ e separando la parte reale dalla immaginaria, si ricava, per la funzione di corrente $\psi$ (coefficiente di $i$ in $f$), l'espressione seguente:

$$\psi = -\frac{q}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \coth \frac{\pi x}{\Omega} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{\Omega} \right] . \tag{8}$$

Si può facilmente constatare che su ciascuna delle due pareti rigide, separate dal foro O, la $\psi$ assume valori costanti diversi, la cui differenza in valore assoluto è $q$. Il che era da attendersi, dato il ben noto significato di $\psi$.

5. Vediamo ora qual'è il comportamento dei filetti liquidi $\psi =$ costante. Poichè $e^{-\pi} = 0{,}04 \ldots$ e $\coth(-\pi) = -1{,}003 \ldots$, si ha

$$-1 \geq \coth \frac{\pi x}{\Omega} \geq -1{,}003 \ldots ,$$

quando $-\infty \leq x \leq -\Omega$. Da ciò segue che per questi valori di $x$ si può ritenere, senz'altro, $\cot \frac{\pi x}{\Omega} = -1$, con che la (8) allora diviene

$$\psi = \frac{q}{\Omega} y . \tag{9}$$

Possiamo concludere: *ad una distanza, dal fondo del recipiente, non inferiore alla larghezza di questo, i filetti liquidi scorrono sensibilmente paralleli alle pareti, con velocità costante* $\frac{q}{\Omega}$.

6. In prossimità dell'orifizio $\frac{x}{\Omega}$ è alquanto piccolo. Essendo allora sensibilmente $\coth \frac{\pi x}{\Omega} = \frac{\Omega}{\pi x}$, la (8) può scriversi

$$x = -\frac{\Omega}{\pi} \cot \frac{\pi \psi}{q} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{\Omega} . \tag{10}$$

Dunque, *in prossimità dell'orifizio le linee di flusso si confondono con curve delle tangenti.*

7. A titolo di curiosità, considero il caso particolare in cui il recipiente diviene infinitamente largo. Ciò corrisponde, in sostanza, all'*efflusso* (con portata costante) *da un forellino scolpito su un suolo indefinito*. In tal caso,

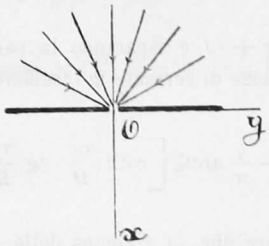


Fig. 2.

nella (8), a $\coth \frac{\pi x}{\Omega}$ ed a $\operatorname{tg} \frac{\pi y}{\Omega}$ vanno rispettivamente sostituiti $\frac{\Omega}{\pi x}$ e $\frac{\pi y}{\Omega}$, cosicchè essa diviene

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \frac{\pi \psi}{q}.$$

Come si vede, *le linee di flusso sono raggi convergenti all'orifizio.*

## Matematica. — *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano.* Nota di S. Catania, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie regolari.* Nota di Ruggiero Torelli, presentata dal Socio E. Bertini.

1. Il Severi ha recentemente messo in luce una notevole proprietà delle superficie regolari, e cioè: la generica curva di un sistema lineare di grado $> 0$ appartenente a una tal superficie, è priva di corrispondenze singolari [1].

Ci si può domandare se questa proprietà non sia in qualche modo invertibile, in guisa da offrire una nuova *caratterizzazione* delle superficie regolari.

Orbene, questa inversione si fa assai semplicemente mediante il seguente

[1] Comptes rendus, 27 janvier 1913.