ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Per quel che riguarda le più notevoli proprietà fisiche dei cristalli di clinozoisite di Campo a' Peri, ho determinato il peso specifico col picnometro, peso che risultò di 3,339.

La doppia rifrazione è debole e positiva; l'indice di rifrazione β, determinato per confronto con liquido di Rohrbach opportunamente diluito, è 1,714 per la luce del sodio.

L'indice β è quindi inferiore a quello di 1,7195 trovato da Weinschenk nei cristalli di Goslerwand.

In relazione con questo relativamente basso indice di rifrazione, è da prevedersi uno scarso tenore in ferro. Non potendo eseguire della mia clinozoisite un'analisi completa, per non distruggere in gran parte l'unico campione che ne possiede il Museo di Firenze, ho creduto opportuno di eseguire soltanto con pochissimo materiale una determinazione volumetrica di ferro, ed ho ottenuto il contenuto di 1,19 % di $Fe^2 O^3$, il più basso, che io sappia, fra le varietà di clinozoisite sin qui osservate.

Quindi, questa di Campo a' Peri è da ritenersi la più pura e la più tipica clinozoisite, fra quelle note finora.

Matematica. — *Teoria del Colpo d'ariete.* Nota dell'ingegnere L. Allievi, presentata dal Corrispondente V. Reina.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano.* Nota di S. Catania, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Le idee che si esprimono comunemente con i termini *corrispondenza univoca, funzione monodroma* (o *operatore*), *operazione* (o *operatore binomio*), *relazione*, intimamente legate fra loro, sono state oggetto di numerosi lavori (1). Mi è parso non inutile di riesaminare la questione ed esporre

(1) G. Peano: (I) *Formulario*, ediz. I-V. — (II) *Sulla definizione di funzione*. Rendiconti R. Accad. Lincei. vol. XX. 1° sem., serie 5a, fasc. 1°, 1911. — (III) *Delle proposizioni esistenziali*, International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912. — (IV) *Una questione di grammatica razionale*, IV Congresso internazionale di Filosofia, Bologna 1911. — (V) *Logica matematica*, Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 1913.

C. Burali-Forti: (I) *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*, L'enseignement mathématique, 1ère année, pag. 264. — (II) *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni*. Rend. R. Accad. Lincei, vol. XXI, i risultati semplici ai quali sono pervenuto, essendo l'idea di funzione, e le altre che ne derivano, di continuo uso nella matematica pura e applicata. Non è certo facile di conciliare la chiarezza con la brevità. Riserbandomi di fare in altra sede un'esposizione minuta dell'argomento, specialmente per i riguardi didattici, avrò cura, in questa breve Nota, di porre in completo rilievo le varie questioni, e i varii modi con cui sono state trattate dai diversi autori. Intanto mi preme fare subito rilevare che il concetto di funzione (semplice, non *functio definita*), come è stato dato per la prima volta da G. Peano (I), non solo è logicamente perfetto, ma è il più semplice che possa aversi nello stato attuale della scienza.

§ 1. « È data una *corrispondenza univoca* tra gli elementi di una classe u e quelli di una classe v », è frase che ha universalmente un significato preciso. Ad essa si può sostituire, con egual grado di precisione logica: « scelto ad arbitrio un elemento x della classe u, è determinato un elemento y di v, e un solo, che dipende da x e da una *legge fissa* (cioè indipendente dallo speciale x scelto, ma valevole per tutti gli x di u) che stabilisce appunto una corrispondenza univoca tra gli u e i v ». Da queste frasi, di significato comune ben noto, ma che contengono svariate idee non tutte logicamente analizzate, risulta che, insieme con la considerata corrispondenza univoca tra gli u e i v, resta determinata una classe w formata da tutte le coppie $(x\,;y)$ che si ottengono facendo variare x in *tutta* la classe u, ed essendo y l'elemento di v che, rispetto alla legge (o corrispondenza) considerata, è determinato dall'x di u. La classe w, e qualsiasi altra classe ottenuta in simil modo con classi u e v, e con una corrispondenza univoca fra gli u e i v, soddisfa alle due condizioni seguenti che, *giova notarlo*, sono indipendenti da *qualsiasi legge di corrispondenza* tra gli u e i v: *a*) fissato x ad arbitrio in u, esiste sempre una coppia di w che ha x per primo elemento; *b*) due coppie di w, aventi a comune il primo elemento, hanno a comune il secondo. La classe di tutte le classi w la in-

---

serie 5ª, 2° sem., 1912, pp. 677-682. — (III) *Sur les lois générales de l'algorithme de fonction et d'opération*, International Congres of mathematicians, Cambridge, 1912. — (IV) *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali*, Atti R. Istituto veneto, tom. LXXII, parte 2ª, 1912-13, pp. 265-276. — (V) *Les propriétés formales des opérations algébriques*, Revue de Mathématique, tom. VI, n. 5, 1899, pp. 141-177.

A. N. Whitehead and B. Russel: *Principia Mathematica.*

C. Burali-Forti, ed R. Marcolongo: (I) *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Zanichelli, 1909, traduz. francese, Hermann, 1910. — (II) *Analyse vectorielle générale*, Mattei e C., Pavie, 1912, vol. I. — (III) Id. id., 1913, vol. II.

dicheremo con $F(u, v)$, e rimane formalmente definita, con concetti tutti analizzati nel *Formulario* (I), da:

$$(\alpha) \qquad u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \supset .\, F(u, v) = \mathrm{Cls}'(u, v) \cap w \ni \{ x \varepsilon u \,.\, \supset_x .\, \exists y \ni [(x; y) \varepsilon w]$$
$$: x \varepsilon u \,.\, (x; y), (x; z) \varepsilon w \,.\, \supset_{x,y,z} .\, y = z \} \text{ (}^1\text{)}.$$

Sia w una classe di $F(u, v)$. La classe w individua una corrispondenza univoca tra gli u e i v; precisamente quella che all'elemento x, scelto ad arbitrio, di u, fa corrispondere l'elemento y di v tale che la coppia $(x; y)$ è un w. Se x è un elemento arbitrario di u, la classe w ci dà il corrispondente y di v (unico, dato x) mediante la coppia $(x; y)$, elemento di w; cioè w ci dà y sempre *unito* ad x, cioè x ed y non compariscono *isolati*. Ora, per seguire l'uso comune, *visto che non è illogico*, abbiamo bisogno che l'x di u e il corrispondente y di v possano comparire *isolatamente* (come, p. es., per le funzioni sen, log, ...); inoltre occorre che l'y sia indicato con una notazione composta che ponga bene in evidenza due cose: quale è l'elemento x di u di cui y è il corrispondente; quale è la *legge* (*corrispondenza*, indipendente da x), in virtù della quale ad x corrisponde y.

La notazione composta, universalmente usata, è della forma generica fx (²), ove x è appunto l'elemento x di u di cui fx indica il corrispondente in v; il simbolo (semplice o composto) (³) f, indipendente da x, rappresenta la *legge* in virtù della quale ad un elemento x di u, non importa quale, corrisponde l'elemento y di v tale che $(x; y)$ è un elemento di w.

Nella notazione fx è *implicitamente* fatta la *convenzione grafica* che « f è un simbolo che deve essere premesso ad x, cioè scritto a sinistra di x », e tale convenzione rappresenta un'*azione grafica* che nella *ideografia* logica deve essere considerata come *primitiva*, cioè come *non definibile simbolicamente mediante altri simboli noti*; e precisamente come in qualsiasi metodo di *simbolismo logico* alcune proprietà logiche iniziali debbono essere date non in simboli, ma mediante parole. Almeno nello stato attuale della scienza *logico-simbolica* pare necessario di ammettere come *primitiva l'azione grafica* di scrivere un simbolo (f) a sinistra d'un altro (x) (⁴). Nella notazione fx il simbolo f, che esprime la legge di corrispon-

(¹) C. Burali-Forti, (V); G. Peano (I, tom. IV), dove al posto di $F(u, v)$ è scritto $v F u$.

(²) Secondo Abel, Lagrange, Hamilton..... Fra i moderni molti usano impropriamente la notazione $f(x)$. Cfr. G. Peano, (I); C. Burali-Forti, (III).

(³) Come D, V, R, rot, div, grad, Rot (cfr. C. Burali-Forti ed R. Marcolongo (I), (II), (III)).

(⁴) Del resto, crediamo che in ogni simbolismo logico ci siano, oltre quella indicata, molte altre azioni grafiche da considerarsi come *primitive*, e che a noi sfuggono per l'abitudine che noi abbiamo al graficismo.

denza considerata tra gli u e i v, si chiama *simbolo* di *funzione*, o, più brevemente, *operatore* (¹); e, una volta ammessa l'idea *primitiva grafica* di *preporre un simbolo a un altro*, la classe generale degli *operatori*, che indicheremo con Op, resta definitą simbolicamente e in modo logicamente esatto come segue:

$$(1) \qquad \mathrm{Op} = f \ni \{\exists (u\,;v) \ni [u\,, v\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} : x\,\varepsilon\, u \cdot \supset_x \cdot fx\,\varepsilon\, w]\}\,.$$

Cioè: con il termine generico *operatore*, abbreviato in Op, intendiamo la classe degli enti tali, che, se f è uno di essi, esiste almeno una coppia di classi, $(u\,;v)$, tale cho, se x è un u, segue, qualunque sia x, che fx è un determinato v (²).

È utile, sotto l'aspetto logico e pratico, considerare le particolari classi di operatori applicabili agli elementi di una classe u, indicati con $\mathrm{Op}\,u$, e quelli che, applicati agli u, producono i v (i v *funzioni* degli u), indicati con $\mathrm{Op}(u\,,v)$, che restano definite formalmente, ponendo:

$$(2) \qquad u\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot \supset \cdot \mathrm{Op}\,u = \mathrm{Op} \cap f \ni [\exists\, \mathrm{Cls} \cap v \ni \{x\,\varepsilon\, u \cdot \supset_x \cdot fx\,\varepsilon\, v\}]$$

$$(3) \qquad u\,, v\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot \supset \cdot \mathrm{Op}(u\,,v) = \mathrm{Op}\,u \cap f \ni [x\,\varepsilon\, u \cdot \supset_x \cdot fx\,\varepsilon\, v]\,.$$

Tra le molte proprietà delle classi definite da (1), (2), (3) a noi occorre porre in evidenza specialmente le seguenti (4) e (5):

$$(4) \qquad f\,, g\,\varepsilon\, \mathrm{Op} \cdot \supset \therefore f = g \cdot = : u\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot f\,, g\,\varepsilon\, \mathrm{Op}\,u \cdot x\,\varepsilon\, u \cdot \supset_{u,x} \cdot fx = gx\,;$$

cioè: « due operatori sono eguali (identici) solo quando, qualunque sia la classe per la quale sono entrambi operatori, applicati a un elemento qualunque di tale classe, producono uno stesso elemento », la quale proprietà si deduce subito dalla definizione leibniziana dell'eguaglianza (³),

$$(5) \qquad u\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot u'\varepsilon\, \mathrm{Cls}'u \cdot \supset \cdot \mathrm{Op}\,u \supset \mathrm{Op}\,u'\,;$$

cioè: « ogni operatore per gli elementi di una classe u è altresì operatore per qualsiasi classe formata con gli u ».

(¹) Consideriamo solo gli operatori a sinistra come i più in uso; ma quanto diciamo si può applicare agli operatori a destra.

(²) Esempii in C. Burali-Forti, (III).

(³) C. Burali-Forti, (I). Occorre notare che dalla (4) risulta la

$$(4') \qquad u\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot f\,, g\,\varepsilon\, \mathrm{Op}\,u \cdot \supset \therefore f = g \cdot = : x\,\varepsilon\, u \cdot \supset_x \cdot fx = gx$$

che stabilisce il significato *ristretto* di « identità di f e g come operatori soltanto della classe u », perchè la parte a destra del $\supset \therefore$ non può sussistere senza l'ipotesi, che è proposizionale *condizionale*, e non assolutamente qualunque siano f e g. La (4) e la (4′) provano che *uno stesso simbolo* di *operatore* NON DEVE essere adoperato *con due significati diversi*. Sebbene ciò sia molto semplice e intuitivo, pare che non sia ancora entrato nel dominio pubblico (cfr. C. Burali-Forti ed R. Marcolongo, (II); e C. Burali-Forti, (III), ove sono considerate anche le *eccezioni pratiche* compatibili con le esigenze logiche).

La classe $F(u, v)$ può essere definita, in modo assai semplice, mediante il concetto di operatore, nel seguente modo:

$$(6)\qquad u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \cdot \supset \cdot F(u, v) = \\ = w \ni \{ \exists \, \mathrm{Op}(u, v) \cap f \ni [w = (x ; fx) | x` u] \} .$$

Ma, viceversa, dalla definizione (α) di $F(u, v)$ è impossibile di dedurre il concetto di operatore, perchè in (α) non è contenuta l'idea primitiva grafica sopra indicata. Non esiste perciò identità tra gli enti rappresentati da $F(u, v)$ e $\mathrm{Op}(u, v)$; il primo contiene meno del secondo l'idea primitiva grafica, e quindi non deve fare meraviglia se dal primo sia impossibile dedurre, senz'altro, il secondo, mentre dal secondo si deduce, senza altri elementi, il primo. Ciò era importante di stabilire, sia per le osservazioni che seguono, sia per constatare come la (1) dà, in modo logicamente esatto, il concetto di *operatore* (o di *funzione monodroma*) sotto la sua forma più semplice possibile e, *va notato*, sotto la forma propria dell'uso comune.

Giova ancora porre maggiormente in evidenza l'intima relazione tra le classi $\mathrm{Op}(u, v)$ e $F(u, v)$. Un elemento f di $\mathrm{Op}(u, v)$ determina una classe di $F(u, v)$ sotto la forma $(x ; fx) | x` u$, ed una sola; cioè, sottintendendo l'ipotesi $u, v \varepsilon \mathrm{Cls}$,

$$(7)\qquad f \varepsilon \mathrm{Op}(u, v) \cdot \supset \cdot [(x ; fx) | x` u] \varepsilon F(u ; v) ;$$

$$(7')\qquad f, g \varepsilon \mathrm{Op}(u, v) : x \varepsilon u \cdot \supset_x \cdot fx = gx : \supset \cdot (x ; fx) | x` u = (x ; gx) | x` u .$$

Viceversa, data una classe w appartenente a $F(u, v)$, resta determinato un solo elemento f di $\mathrm{Op}(u, v)$ che dà $w = (x ; fx) | x` u$, cioè:

$$(8)\qquad w \varepsilon F(u, v) \cdot \supset \cdot \exists \, \mathrm{Op}(u, v) \cap f \ni \{ w = (x ; fx) | x` u \}$$

$$(8')\qquad w \varepsilon F(u, v) \cdot f, g \varepsilon \mathrm{Op}(u, v) \cdot w = (x ; fx) | x` u = (x ; gx) | x` u \cdot \supset : \\ x \varepsilon u \cdot \supset_x \cdot fx = gx .$$

In particolare risulta che tra le due classi $\mathrm{Op}(u, v)$ e $F(u, v)$ può stabilirsi una *corrispondenza univoca* e *reciproca* (¹), e quindi, ad es., che il numero (finito o infinito (cardinale)) degli $\mathrm{Op}(u, v)$ è identico al numero degli elementi (classi di coppie; le w) di $F(u, v)$.

§ 2. Come il concetto di *relazione*, posto dal Russell quale base logica, possa essere espresso mediante i simboli ideografici del Formulario, e come da esso si possa dedurre la *fonctio definita* [esattamente la nostra classe $F(u, v)$] è già stato indicato dal Peano, (II), e non stiamo qui a ripeterlo. Noi vogliamo soltanto fare vedere come dal concetto semplice e usuale di *operatore*, si possa dedurre quello di *relazione* e, contrariamente a quanto

(¹) Formularii, (II), (III), (IV), (V). È chiaro che per la classe $\mathrm{Op}(u, v)$, identica a vfu, si possono stabilire i concetti di sim (simile), rcp (reciproca) come nel Formulario.

fa il Russell, sotto forma identica a quella usata in tutta la matematica per le varie relazioni che in essa si considerano.

Nell'uso comune si considerano *relazioni* tra gli elementi di una classe u e quelli di una classe v. Indicando con $\mathrm{Relatio}(u, v)$ il complesso di tali enti, si può porre:

(9) $$u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \cdot \supset \cdot \mathrm{Relatio}(u, v) = \mathrm{Op}(v, \mathrm{Cls}'u)\ ^{(1)}.$$

Cioè: « se u e v sono classi, chiameremo relazione tra gli u e i v qualunque operatore f che trasforma ogni v in una classe formata con gli u ». Segue che se $f \varepsilon \mathrm{Relatio}(u, v)$. e se $y \varepsilon v$, allora gli x di u, che sono nella relazione individuata da f con l'y dato di v, sono tutti e soli gli elementi della classe fy. In altri termini, la condizione

$$x \varepsilon f y,$$

ove y è un v, e, necessariamente, x un u, esprime che « x è nella relazione f con y ». Ora questa è appunto la forma usuale, poichè, ad esempio, per a, b numeri reali con segno, $a < b$ esprime che « a è uno dei numeri minori di b »; cioè: $a \varepsilon b - \mathrm{Q}$, ovvero $a \varepsilon (-\mathrm{Q} + b)$, e quindi l'$f$ è il simbolo composto $-\mathrm{Q}+$, e si può scrivere:

$$a \varepsilon (-\mathrm{Q} +) b,$$

e l'ordinario segno $<$ equivale al simbolo composto $\varepsilon(-\mathrm{Q}+)$. Per gli autori che parlano di « functio polydroma », la parola *funzione* è equivalente a *relazione*.

Concludendo: dal concetto di *operatore* (logicamente e formalmente definibile mediante una semplice ed usuale idea primitiva grafica), qual è da tutti considerato nella matematica, si possono dedurre i concetti, pure usuali, di *operazione* (binomia) [2] e di relazione, e sotto la forma semplice che è usata da tutti. Ciò posto non si comprende perchè, seguendo Russell, si vogliano a ogni costo introdurre, con classi di classi, classi di classi di classi, ecc., semplici o di coppie o di terne, ecc., delle inutili complicazioni, allontanando l'algoritmo matematico dalle forme semplici già da tempo acquisite. Che si abbandonino o si modifichino le forme usuali quando sono logicamente scorrette, va bene [3]; ma che si rendano complicate, incomode, e talvolta anche scorrette, quelle logicamente precise e praticamente semplici, non è assolutamente ammissibile.

In un altro lavoro farò il confronto tra le classi $\mathrm{Op}(u, v)$ e $\mathrm{F}(u, v)$ con le classi $v f u$ e $v \mathrm{F} u$ del *Formulario* di Peano.

(1) C. Burali-Forti, (II), per $u = v$; Rend. del Circ. mat. di Palermo: *Sulle classi ordinate e i numeri trasfiniti* (tom. VIII, 1894); *Una questione sui numeri trasfiniti* (tom. XI, 1897).

(2) Non stiamo a sviluppare questa parte, rimandando il lettore a C. Burali-Forti, (III).

(3) Ciò non sempre si fa, e il calcolo vettoriale ne è una prova. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, (II). (III).