ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale.* Nota I di EMMA SCIOLETTE, presentata dal Socio V. VOLTERRA

Le condizioni che, secondo Lebesgue, definiscono l'integrale, sono:

I. $$\int_a^b \{f(x) + \varphi(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx\,.$$

II. Per $f(x) \geq 0$ e $b \geq a$,
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$$

III. $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\, dx\,.$$

IV. $$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx\,.$$

V. $$\int_0^1 dx = 1\,.$$

VI. Se $f_n(x)$ tende crescendo verso $f(x)$ (funzione limitata), l'integrale di $f_n(x)$ tende verso quello di $f(x)$.

L'indipendenza delle prime cinque condizioni risulta evidente, nel tempo stesso che la portata, cioè lo scopo di ciascuna: è facile, infatti, costruire operazioni funzionali che soddisfano a un gruppo qualsiasi di esse e non a tutte. Non altrettanto evidente è l'indipendenza della condizione VI, e non altrettanto facile l'esame della sua portata effettiva: in particolare non si vede se e quale modificazione essa apporti al campo delle operazioni circoscritto con le prime cinque. Il Lebesgue ha messo in rilievo questa difficoltà in modo esplicito [1], e ha richiamato l'attenzione dei matematici sull'interesse che vi sarebbe nel risolverla.

[1] Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier-Villars, 1904, cap. VII, pag. 99, nel testo e nella nota [1] in calce.

Ora, per quanto riguarda la compatibilità, i lavori del Lebesgue stesso permettono di dare una risposta affermativa, perchè gli integrali che egli insegna a costruire soddisfano a tutte le sei condizioni. Resta invece insoluta la questione dell' indipendenza. Per discuterla, occorre osservare che nell'enunciato della VI si debbono analizzare due parti:

α) un enunciato implicito che afferma l'esistenza dell' integrale della funzione limitata $f(x)$, limite di una successione monotòna di funzioni $f_n(x)$, ciascuna limitata e integrabile [1];

β) un altro enunciato esplicito che asserisce la validità della formula:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

sotto le stesse condizioni.

Il primo riguarda la delimitazione del campo delle funzioni a cui si applica l'operazione « integrale »; il secondo riguarda una proprietà dell'operazione.

Prendendo a considerare le due parti separatamente, mostrerò, in questa Nota che la parte α) è effettivamente indipendente. In una Nota successiva mostrerò, invece, che per la parte β), in un campo abbastanza esteso anche di là dal campo Riemanniano, la questione si risolve in favore della dipendenza.

Esaminare l' indipendenza della parte α), significa ricercare se esiste una operazione funzionale che soddisfi ai primi cinque postulati senza soddisfare la parte α) del postulato VI cioè tale che il suo campo di esistenza essendo *chiuso* rispetto ai primi cinque postulati (cioè l'applicazione della loro parte *esistenziale* non faccia esorbitare dal campo; per es. se il campo contiene due funzioni, contenga anche la loro somma, ecc.) non lo sia rispetto al postulato VI.

L' integrale di Riemann, risolve facilmente il quesito [2]. Infatti la

[1] Anche nell'enunciato delle (I), (II), (III) e (IV) è inclusa la questione dell'esistenza; però essa ha, negli assiomi (I) e (IV), un tale carattere di necessità che non può essere dubbia l' interpretazione. E, per contro, la (II) è evidentemente condizionata alla esistenza, cioè si asserisce la non negatività dell' integrale, quando esso esiste. E similmente la proprietà (III) del trasporto non ha senso se non per le funzioni integrabili.

[2] È appena necessario osservare che anche l' integrale di Cauchy (definito per le funzioni continue) e l' integrale di Dirichlet-Lipschitz (valevole per le funzioni che hanno per punti di discontinuità i punti di un insieme riducibile) sono operazioni funzionali che verificano i postulati I-V, e non soddisfano la parte α) del VI. Considerando anche l' integrale di Duhamel e Serret, definito come la funzione primitiva della funzione proposta, « se intendiamo per funzione primitiva quella che in ogni punto ha per derivata la funzione data », si ritorna a definire l' integrale delle funzioni continue, e si arriva alla stessa conclusione.

condizione di Arzelà (¹) necessaria e sufficiente affinchè una successione convergente qualunque di funzioni integrabili R, definite tutte in un intervallo, abbia per limite una funzione pure integrabile R, è *la quasi uniforme convergenza in generale*, cioè la quasi uniforme convergenza in tutto l'intervallo, diminuito di un numero *finito* d'intervalli parziali, la cui somma abbia una lunghezza arbitrariamente piccola. Adottando la locuzione già usata da Osgood, da Schoenflies, da Hobson, di convergenza uniforme in un punto, ed estendendola al caso della convergenza quasi uniforme, è possibile dire che la suddetta condizione equivale all'altra: « che i punti che « non sono di quasi uniforme convergenza debbono formare un insieme di « estensione nulla (misura nulla nel senso di Jordan) ». L'ipotesi che le singole funzioni $f_n(x)$ tendano, crescendo, verso il loro limite $f(x)$, permette di sostituire la convergenza uniforme a quella quasi uniforme, ed enunciare, quindi, come condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità Riemanniana di $f(x)$, la convergenza quasi uniforme, in generale, della successione; cioè, per quanto è stato detto prima, « ciascun punto dell'intervallo, eccetto, « al più, un insieme di estensione nulla, deve essere un punto di uniforme « convergenza ».

Col seguente esempio si vede che non ogni successione crescente di funzioni limitate integrabili R, convergente verso una funzione limitata, soddisfa a queste condizioni.

L'intervallo sia $(0,1)$ e la funzione generica sia così definita:

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 \quad \text{per} \quad x = \dfrac{p}{q} \quad \text{con} \quad q = 1, 2, \ldots (n-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e} \quad p < q \quad \text{e primo con } q \\ f_n(x) = 0 \quad \text{nel resto dell'intervallo.} \end{cases}$$

Essa soddisfa alla condizione di essere integrabile R, limitata e monotòna rispetto a n. Ma non esiste alcun punto di uniforme convergenza della successione. La funzione limite

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$$

ha il valore uno per x razionale e il valore zero per x irrazionale, cioè è discontinua ovunque e non integrabile R.

Sarebbe poi facile trasformare questo esempio di successione non decrescente rispetto a n, in un altro di successione effettivamente crescente.

(¹) Arzelà, Memorie e Note varie pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia di Bologna e nei Rendiconti dei Lincei, dal 1882 al 1899, e riassunte nel lavoro: *Sulle funzioni* (Memorie della R. Accademia di Bologna, 1900, ser. V, vol. VIII, pp. 131-186 e pp. 701-744).

Da ciò si deduce che: « se una successione di funzioni appartenenti « tutte a una categoria che sia chiusa rispetto ai primi cinque postulati, « tende crescendo verso una funzione limite, questa funzione non appartiene « alla stessa categoria ». Quindi la parte α) del postulato VI può essere intesa nel seguente modo: una volta fissati, sia pure arbitrariamente, ma in accordo coi primi cinque postulati il significato dell'integrale e il campo delle funzioni integrabili, noi possiamo estendere il campo definendo che: ogni qualvolta una successione monotòna di funzioni limitate, integrabili, ha per limite una funzione limitata, noi riguardiamo come integrale di questa il limite degli integrali delle funzioni date, sempre che esso esista e non conduca a contraddizioni; l'inesistenza delle quali, in un campo funzionale sufficientemente esteso, risulta, come già ho accennato, dalla considerazione di un ente, « l'integrale di Lebesgue », che si può definire costruttivamente per altra via, che coincide rispettivamente con gli integrali altrimenti definiti nei campi più limitati in cui questi esistono, e rispetto a cui il postulàto VI vale illimitatamente.

Resta dunque dimostrato che, per quanto riguarda la parte α) del postulato VI, il quesito si risòlve in favore della indipendenza.

Fisica. — *Misure di deviazione dei gravi.* Nota del dott. Giuseppe Gianfranceschi, presentata dal Socio P. Blaserna.

L'uso della macchina di Atwood nello studio della deviazione dei gravi, proposto e seguìto per il primo dal Hagen [1], ha portato un progresso grande, nelle ricerche sperimentali del fenomeno, per la regolarità della caduta. Il metodo consiste sostanzialmente in questo: sostituire alla caduta libera del grave quella di un peso della macchina di Atwood. La regolarità della caduta diviene, così, grandissima rispetto a quella libera. Ciò è chiaro di per se stesso, ed è stato dimostrato dal fatto, perchè nelle esperienze del Hagen per la prima volta non si è avuto nessuno scartamento dalla deviazione orientale.

Il modo di osservazione seguìto dallo stesso autore rende inoltre visibile il fenomeno anche quando si usufruisca soltanto di una piccola altezza. Se si dispone un canocchiale orizzontalmente col suo asse ottico nel piano del meridiano, e si osserva non già il peso, perchè non riesce visibile nella rapidità della caduta, ma il tratto di filo che immediatamente lo segue, si può apprezzarne con esattezza la posizione rispetto ad un reticolo dell'oculare. Allora, compiuta l'escursione del grave, si vede il filo oscillare pen-

(1) J. Hagen, *La rotation de la Terre: ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles.* Appendice 2a, pp. 29-47 (1912), Tipografia Vaticana.