ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Da ciò si deduce che: « se una successione di funzioni appartenenti « tutte a una categoria che sia chiusa rispetto ai primi cinque postulati, « tende crescendo verso una funzione limite, questa funzione non appartiene « alla stessa categoria ». Quindi la parte α) del postulato VI può essere intesa nel seguente modo: una volta fissati, sia pure arbitrariamente, ma in accordo coi primi cinque postulati il significato dell'integrale e il campo delle funzioni integrabili, noi possiamo estendere il campo definendo che: ogni qualvolta una successione monotòna di funzioni limitate, integrabili, ha per limite una funzione limitata, noi riguardiamo come integrale di questa il limite degli integrali delle funzioni date, sempre che esso esista e non conduca a contraddizioni; l'inesistenza delle quali, in un campo funzionale sufficientemente esteso, risulta, come già ho accennato, dalla considerazione di un ente, « l'integrale di Lebesgue », che si può definire costruttivamente per altra via, che coincide rispettivamente con gli integrali altrimenti definiti nei campi più limitati in cui questi esistono, e rispetto a cui il postulàto VI vale illimitatamente.

Resta dunque dimostrato che, per quanto riguarda la parte α) del postulato VI, il quesito si risòlve in favore della indipendenza.

Fisica. — *Misure di deviazione dei gravi.* Nota del dott. Giuseppe Gianfranceschi, presentata dal Socio P. Blaserna.

L'uso della macchina di Atwood nello studio della deviazione dei gravi, proposto e seguìto per il primo dal Hagen [1], ha portato un progresso grande, nelle ricerche sperimentali del fenomeno, per la regolarità della caduta. Il metodo consiste sostanzialmente in questo: sostituire alla caduta libera del grave quella di un peso della macchina di Atwood. La regolarità della caduta diviene, così, grandissima rispetto a quella libera. Ciò è chiaro di per se stesso, ed è stato dimostrato dal fatto, perchè nelle esperienze del Hagen per la prima volta non si è avuto nessuno scartamento dalla deviazione orientale.

Il modo di osservazione seguìto dallo stesso autore rende inoltre visibile il fenomeno anche quando si usufruisca soltanto di una piccola altezza. Se si dispone un canocchiale orizzontalmente col suo asse ottico nel piano del meridiano, e si osserva non già il peso, perchè non riesce visibile nella rapidità della caduta, ma il tratto di filo che immediatamente lo segue, si può apprezzarne con esattezza la posizione rispetto ad un reticolo dell'oculare. Allora, compiuta l'escursione del grave, si vede il filo oscillare pen-

[1] J. Hagen, *La rotation de la Terre: ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles.* Appendice 2ª, pp. 29-47 (1912), Tipografia Vaticana.

dolarmente ogni volta che il peso, cadendo, abbia deviato in direzione normale al piano del meridiano. Dalla direzione della prima oscillazione si deduce il segno della deviazione stessa.

Se poi si richiede anche una determinazione quantitativa si può calcolare la posizione finale di equilibrio e misurare la distanza fra questa e la posizione primitiva del filo.

I vantaggi di questo metodo mi mossero a ripetere le esperienze. E poichè disponevo di un locale singolarmente adatto, ho potuto fare una determinazione quantitativa delle deviazioni. Ho seguito soltanto un modo di osservazione diverso da quello del Hagen, e che mi permettesse di conservare il documento di ciascuna esperienza, e di misurare contemporaneamente le deviazioni orientale e meridionale ciò che non era possibile con l'osservazione ottica.

Condizioni sperimentali.

Le esperienze furono eseguite all' Istituto Massimo di Roma dove, lungo il muro maestro della facciata secondaria, esiste un canale verticale alto circa 32 metri, con una superficie di sezione di circa due terzi di metro quadrato. Il canale non aveva che una piccola fenestra che corrisponde in una delle sale adibite a gabinetto di fisica. Praticai alle due estremità le opportune aperture, fissando in alto la puleggia, e adattando la parte più bassa a sito di osservazione. La chiusura venne poi fatta in modo da evitare ogni possibile corrente d'aria.

Il metodo di osservazione consiste nel far colpire, dal peso che cade, un cartoncino bersaglio. Perciò, nella parte più bassa del canale, ad un metro e mezzo da terra, ho fissato nel muro una forte base circolare in legno. Nella parte centrale di questa è fissata una cornicetta metallica quadrata, entro cui si può chiudere un cartoncino di un decimetro quadrato di superficie. Nel centro di questo è stampato in litografia un quadratino millimetrato di un centimetro di lato. Il centro di questo quadratino corrisponde esattamente al piede della verticale abbassata dal punto di sospensione del grave. Al disotto del cartoncino, il legno della base è sostituito da un sughero. Il peso di forma cilindrica porta nella sua estremità inferiore una punta sottile d'acciaio che nella caduta fora il cartoncino e penetra nel sughero.

È inutile dire che la costruzione del peso cilindrico con la sua punta di acciaio richiede una estrema precisione. Su ciascun cartoncino colpito si segna, dopo ciascuna esperienza, la vera posizione del piede della verticale, per gli eventuali spostamenti. Si possono così determinare le coordinate del punto colpito rispetto all'origine, che è nel piede della verticale, e a due assi scelti, uno nella direzione del meridiano, e l'altro in quella perpendicolare. Per ciò la cornicetta metallica su cui si fissa il cartoncino è già orientata in modo che i suoi lati sono paralleli a quelle due direzioni.

L'esperienza procede dunque così. Nel primo istante il contrappeso è tenuto fermo nella sua posizione più bassa per mezzo di un filo fusibile, il peso nel suo punto più alto è vicino alla puleggia. Quando si è certi che tutto sia perfettamente fermo, e nel canale non siano correnti aeree sensibili, si manda una corrente elettrica nel filo che trattiene il contrappeso. Contemporaneamente si preme il bottone di un contasecondi per metterlo in movimento. Il contrappeso comincia a salire mentre il peso discende. Quanto questo giunge a colpire il bersaglio si ferma il contasecondi. Si ha così la durata di caduta. Allora si penetra nel canale, si dispone il peso in modo che sia libero di oscillare, mentre la punta di acciaio sfiora il cartoncino senza toccarlo. Se le oscillazioni pendolari del peso si osservano nelle due direzioni degli assi coordinati, si può determinare con molta precisione quale è la sua posizione di equilibrio rispetto al reticolato centrale del bersaglio. Fatto questo si ritira il bersaglio, ci si scrivono sopra le coordinate del piede del filo a piombo, e l'ora dell'esperienza, si sostituisce con un nuovo cartoncino e si solleva di nuovo il peso. Così tutto è pronto per una nuova esperienza, che però non può farsi se non dopo un tempo sufficiente perchè tutto resti di nuovo perfettamente fermo.

Costanti delle esperienze.

L'altezza di caduta, calcolata nella distanza dal peso al cartoncino-bersaglio, era di m. 30,39. La durata di caduta, che si mantenne costante in tutte le esperienze era di $8^s,35$.

Le altre grandezze che interessavano erano le seguenti:

Peso del grave	. . . . . .	gr. 49,785
» » contrappeso	. . . .	» 30,160
» » filo per un metro	. . .	» 0,189
» della puleggia	. . . .	» 93,0

Per la posizione geografica, la latitudine dell'Istituto Massimo è

$$\varphi = 41°,54'.$$

Risultati sperimentali.

Dal 26 giugno al 2 agosto di quest'anno potetti eseguire 175 prove, rappresentate da 175 bersagli. Questi bersagli sono tutti i cartoncini colpiti in questo periodo di tempo, nessuno escluso. Le esperienze venivano fatte di preferenza in questi quattro tempi: al levare del sole, al mezzogiorno, al tramonto, e quando il sole era sotto l'orizzonte da qualche ora. Furono fatte due serie di prove: la prima disponendo il piano della puleggia nel piano del meridiano, la seconda nel piano normale. Ciò, naturalmente, per verificare se quella direzione influiva nella deviazione. La prima serie comprende 150 bersagli, la seconda soltanto 25 perchè si vide che non si aveva influenza sensibile.

La posizione del punto colpito veniva calcolata fino al decimo di millimetro o al mezzo decimo, altrettanto dicasi per la posizione del piede della verticale. Le deviazioni erano così date e segnate su ciascun cartoncino in millimetri e decimi di millimetro. Nei calcoli dovetti però introdurre una correzione, dovuta ad una erronea determinazione del meridiano, e così nelle tabelle complete le deviazioni furono scritte anche con i centesimi di millimetro.

I risultati delle 175 prove si possono riassumere come nelle due tabelle seguenti:

Deviazione orientale $+y$ verso Est.

Deviazioni in mm.	+1.1	+1.4	+1.5	+1.6	+1.7	+1.8	+1.9	+2.0	+2.1	+2.2	+2.3	+2.4
Numeri dei bersagli	1	3	6	6	21	49	43	22	11	7	4	2

Deviazione meridionale $+x$ verso Sud.

Deviazioni in mm.	—0.5	—0.4	—0.3	0.2	—0.1	0.0	+0.1	+0.2	+0.3
Numero dei bersagli	3	3	8	22	32	60	31	10	6

Si può anche dire che tutte le 175 prove, eccetto una che ha una deviazione orientale minima di mm. 1.14, sono rappresentate da punti contenuti in un rettangolo di $^{11}/_{10}$ di millimetro di lato nel senso delle y, e di $^{9}/_{10}$ nel senso delle x.

I risultati complessivi sono i seguenti [1]:

deviazione Est:

media della 1ª serie (150 prove) $= + 1.866$ mm.
» » 2ª » (25 prove) $= + 1.867$ »
media totale di 175 prove $= + 1.866$ mm.;

deviazione Sud:

media della 1ª serie (150 prove) $= - 0.028$ mm.
» » 2ª » (25 prove) $= - 0.064$ »
media totale di 175 prove $= - 0.033$ mm.

[1] Il resoconto completo delle esperienze sarà pubblicato nel *Nuovo Cimento.*

La determinazione degli errori probabili ha dato questi risultati:

deviazione Est:

$[vv] = 6.1026$ errore probabile della media ± 0.0142 mm.;

deviazione Sud:

$[vv] = 3.2969$ errore probabile della media ± 0.0104 mm.

I valori dati dunque dalle esperienze, sono:

deviazione orientale	mm.	1.866 ± 0.014
" settentrionale	"	0.033 ± 0.010

Valori teorici delle deviazioni.

La teoria della caduta libera dei gravi, data da Gauss e da Laplace, è ancora quella che fino ad oggi è la più vera, quantunque non sia che una soluzione approssimata del problema. Sono note le equazioni differenziali del Gauss per il moto relativo di un punto sulla superficie della terra. Se si stabilisce una terna di assi con l'origine nella posizione iniziale del grave, con l'asse z diretto verso lo zenith, l'asse x nel piano del meridiano, e positivo verso l'equatore, l'asse y verso Est, le equazioni del moto hanno la forma

$$\begin{aligned} x'' &= 2\omega \operatorname{sen} \varphi \,.\, y' \\ y'' &= -2\omega (\operatorname{sen} \varphi \,.\, x' + \cos \varphi \, z') \\ z'' &= 2\omega \cos \varphi \,.\, y' - g\,, \end{aligned}$$

dove ω è la velocità angolare della terra, φ la latitudine geografica del luogo di osservazione, e g l'accelerazione di gravità. In queste equazioni sono trascurate le potenze di ω superiori alla prima. Con questo stesso criterio di approssimazione, e di più supponendo g costante e facendo nulle le costanti di integrazione il sistema di soluzione delle equazioni date prende la forma

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{3}\, \omega \cos \varphi \,.\, g t^3 \\ z &= -\frac{1}{2}\, g t^2 . \end{aligned}$$

Il Gauss calcola anche l'influenza della resistenza dell'aria, ma questi termini costituiscono una correzione che è sempre inferiore alla precisione sperimentale.

Applicando queste formole al caso delle esperienze presenti, nella ipotesi della caduta libera si avrebbe, per una durata t di caduta libera eguale a $2^s.49$ corrispondente all'altezza di m. 30.4,

$$y = \text{mm. } 2.738$$
$$x = 0\,.$$

Per il caso della macchina di Atwood le formole sono state date dal Hagen seguendo il criterio adoperato dal Binet nel problema del pendolo conico.

Le equazioni differenziali in questo caso, scritte con i soliti criterii di approssimazione, prendono la forma

$$x'' = (g - \gamma)\,\frac{x}{z}$$
$$y'' = -\,2\omega\cos\varphi\,.\,z' + (g - \gamma)\,\frac{y}{z}$$
$$z'' = \gamma\,.$$

nelle quali, come apparisce dalla 3^a, γ rappresenta l'accelerazione di caduta ridotta nella macchina di Atwood.

Se in queste equazioni si suppone γ costante, e si fanno nulle, al solito, le costanti di integrazione, si ottiene il sistema di soluzioni seguente:

$$x = 0$$
$$y = \frac{\gamma^2}{2\gamma + g}\,\omega\cos\varphi\,.\,t^3$$
$$z = -\,\frac{1}{2}\,\gamma\,t^2.$$

La costanza di γ bisogna ottenerla con un artificio sperimentale, oppure introducendo per essa nella equazioni un valore medio dell'accelerazione che nella macchina di Atwood è una funzione dell'altezza.

Nel caso presente, il valore medio di γ, ottenuto simultaneamente con artifizio sperimentale e con un valore medio conforme alla definizione di accelerazione media, è risultato

$$\gamma = \text{m. } 0.872\,.$$

Se introduciamo questo valore e quello della durata di caduta, $t = 8^s.35$, nelle formule del Hagen, si ottiene

$$x = 0$$
$$y = \text{mm. } 2.081\,.$$

I valori sperimentali davano invece

$$x = -0.033 \pm 0.010$$
$$y = 1.866 \pm 0.014 .$$

La discordanza tra i valori teorici e gli sperimentali è senza dubbio superiore ai concetti di approssimazione seguìti dal Gauss.

Può interessare il confronto di questi risultati con quelli degli sperimentatori precedenti. Nella tabella seguente sono perciò riferiti i valori trovati da altri, scegliendo fra gli sperimentatori anteriori al 1900 soltanto i più importanti.

Sperimentatori	Altezza di caduta	Deviazione Est			Deviazione Sud		
		Dev. sper.	Dev. teor.	Errore probabile	Dev. sper.	Dev. teor.	Errore probabile
	m	mm			mm		
Guglielmini, Bologna (1790)	29,3	+ 4.51	—	—	0	—	—
Guglielmini, Bologna (1791)	78.3	+18.89	10.83	—	+11.89	0	—
Benzenberg, Hamburg (1802)	76.3	+ 9.0	8.51	—	+ 3.4	0	—
Benzenberg, Schlebusch (1804)	85.1	+11.5	—	—	0.11	0	—
Reich, Freiburg (1831)	158.5	+28.4	27.5	—	+ 4.4	0	—
Hall, Cambridge M. (1902)	23.0	+ 1.5	1.77	± 0.05	+ 0.05	0	± 0.04
Hagen, Roma (1912)	23.0	+ 0.899	0.889	± 0.027	+ 0.01	0	± 0.027
G. G., Roma (1913)	30.4	+ 1.866	2.081	± 0.014	— 0.033	0	± 0.010

Le deviazioni teoriche sono calcolate qui secondo le formole di Gauss per la caduta libera e secondo le modificazioni del Hagen per la macchina di Atwood.

Nell'agosto passato, il Woodward [1] ha dato una soluzione nuova del problema, tenendo conto di tutto ciò che era stato trascurato fin qui, e cioè: della forma del campo gravitazionale, dei termini con ω alla 2ª potenza, e della distinzione tra latitudine geografica e geocentrica. I risultati a cui giunge si possono riassumere così:

la deviazione orientale è, a meno di piccole correzioni, quella stessa che vien data dalle formole classiche di Gauss, Laplace e Poisson;

la deviazione in direzione parallela al meridiano avviene sempre verso il polo della terra che è più vicino, e non verso l'equatore, ed essa è sempre una parte sensibile della deviazione orientale.

[1] R. S. Woodward, *The orbits of freely falling Bodies*. T. Astron. J., n. 651-652, agosto (1913).

Così per esempio, nel caso di un'altezza di caduta di 490 metri, egli calcola le seguenti deviazioni:

$$y = + \text{cm. } 16.85$$
$$x = - \;\text{»}\; 3.03\,.$$

Applicando le formole del Woodward alle esperienze presenti, supponendo la caduta libera, e, per semplicità supponendo fatte le esperienze alla latitudine di 45°, si avrebbe

$$y = \text{mm. } 2.74$$
$$x = \;\text{»}\; -2.55\,,$$

e cioè la deviazione orientale è quella stessa che si ottiene con la formola di Gauss, e, per l'altra, la deviazione è settentrionale e dello stesso ordine di grandezza della deviazione orientale.

Questi risultati farebbero dubitare della bontà della teoria del Woodward che pure apparisce la più completa di quante ne siano date dopo la teoria classica.

Possiamo dunque concludere che è ancora la teoria di Gauss che rappresenta meglio il fenomeno sperimentale; la coincidenza però non è ancora soddisfacente.

Meteorologia. — *Nevosità relativa e frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali.* Nota di V. Monti, presentata dal Corrisp. A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.