ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche, e, in particolare, sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti.* Nota I (¹), di MARGHERITA BELOCH, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

1. In questa Nota espongo i risultati di alcune mie ricerche sulla configurazione delle curve algebriche sghembe. Partendo da un teorema dimostrato da Hilbert sulla configurazione delle curve algebriche piane col massimo numero di circuiti (²), ed estendendolo alle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti, situate, come è noto (³) sopra superficie del secondo ordine, sono stata condotta allo studio della configurazione di una curva algebrica sghemba *qualsiasi*. situata sopra una superficie del secondo ordine, giungendo così a risultati molto più generali.

Nei teoremi che andrò enunciando, le dimostrazioni dirette sono quasi evidenti, mentre ciò che mi è costato più fatica a stabilire sono i teoremi inversi, cioè le dimostrazioni dell'*esistenza* effettiva dei diversi tipi di configurazioni presi in esame.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1913.

(²) Ossia « *Una curva algebrica piana d'ordine n, priva di singolarità, col massimo numero di circuiti, può avere al più* $\frac{n-2}{2}$ o $\frac{n-3}{2}$ *circuiti (secondo che n è pari o dispari) disposti in modo che il primo racchiuda tutto il secondo, questo racchiuda tutto il terzo, e così di seguito, il penultimo racchiuda tutto l'ultimo* » (ved. Hilbert: *Reelle Züge algebraischer Curven*, Math. Ann. XXXVIII).

Si può facilmente dimostrare, con un procedimento simile a quello adoperato da Hilbert, che un teorema analogo vale anche per una curva che non abbia il massimo numero di circuiti, cioè:

Una curva algebrica piana qualsiasi, d'ordine n, priva di singolarità, non può avere più di $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ *circuiti (secondo che n è pari o dispari) disposti in modo che il primo racchiuda tutto il secondo, questo tutto il terzo, e così di seguito, il penultimo racchiuda tutto l'ultimo. Se la curva ha esattamente* $\frac{n}{2}$ *circuiti (n pari) o* $\frac{n-1}{2}$ *circuiti (n dispari) disposti in tal modo, non vi potrà essere alcun circuito ulteriore se n è pari; ve ne sarà uno solo (e d'ordine dispari) se n è dispari. Esistono effettivamente curve di questo tipo.*

(³) Halphen, Bull. de la Soc. math. de France, vol. II, pag. 45; Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Crelle's Journal, vol. 93°, pag. 293.

2. Ricordata la definizione di circuiti chiusi d'ordine pari e d'ordine dispari [1], e supposto che i circuiti siano tracciati sopra una quadrica, divido i primi ulteriormente in due categorie, secondo che si possano o no ridurre ad un punto per deformazione continua senza uscire dalla superficie. Nel primo caso, il *circuito* lo chiamo d'ordine pari *di 1ª specie*; nel secondo caso, d'ordine pari *di 2ª specie.*

Si vede facilmente che ogni circuito il quale, considerato come taglio, spezzi la connessione della superficie, è di 1ª specie, e viceversa; mentre ogni circuito il quale, considerato come taglio, non ne spezzi la connessione, è di 2ª specie e viceversa.

È evidente che due circuiti di specie diversa non si potranno mai ridurre l'uno all'altro per deformazione continua, senza uscire dalla superficie.

3. Ogni circuito chiuso, tracciato sopra una quadrica a punti ellittici, è di ordine pari di 1ª specie. Invece sopra una quadrica a punti iperbolici esistono tanto circuiti di 1ª specie quanto di 2ª specie, i primi seganti le rette della superficie in un numero pari di punti, i secondi in un numero dispari di punti.

Finalmente, sopra le quadriche a punti parabolici (coni e cilindri), tutti i circuiti seganti le generatrici in un numero pari di punti sono di 1ª specie, e non esistono circuiti di 2ª specie propriamente detti, sebbene esistano circuiti seganti le generatrici in un numero dispari di punti. Questi si possono tutti per deformazione continua, ridurre al vertice del cono senza uscire dalla superficie. Per distinguerli, li chiamo *circuiti monocentrici.*

Curve situate sopra quadriche a punti ellittici.

4. *Data sopra una quadrica a punti ellittici* (p. es. ellissoide) *una curva algebrica sghemba qualsiasi, d'ordine n* (*necessariamente pari*), *priva di singolarità,* si può facilmente dimostrare che *essa non può avere più di* $\frac{n}{2}$ *circuiti* (*di 1ª specie*) *disposti in modo che si possano tutti ridurre ad uno stesso punto per deformazione continua, restando sulla superficie e senza che essi si attraversino mai durante la deformazione.* Basta infatti condurre un piano per due punti dei circuiti estremi della serie di circuiti considerata e contare il numero delle intersezioni di questo piano con la curva.

[1] Staudt, *Geometrie der Lage*, § 12, pag. 153.

Ho dimostrato, applicando il metodo delle piccole variazioni, che *esistono effettivamente sulla quadrica curve algebriche d'ordine n, prive di singolarità, con* $\frac{n}{2}$ *circuiti disposti nel modo detto. In questo caso la curva non ha circuiti ulteriori.*

5. Supponendo, in particolare, che *la curva abbia il massimo numero di circuiti*, ossia $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ [1] senza difficoltà si dimostra, che, *se* $n \geq 6$, *essa non può avere più di* $\frac{n}{2}-1$ *circuiti riducibili tutti ad uno stesso punto per deformazione continua, restando sulla superficie e senza che essi si attraversino mai durante la deformazione.*

Ho provato anche qui l'esistenza di curve algebriche d'ordine n, prive di singolarità, col massimo numero di circuiti, tra cui $\frac{n}{2}-1$ disposti nel modo detto.

I circuiti disposti in questo modo, cioè riducibili tutti ad uno stesso punto per deformazione continua, restando sulla superficie e senza che essi si attraversino mai durante la deformazione, si possono chiamare *circuiti omocentrici tra loro.*

(È evidente che due circuiti tracciati sulla superficie sono sempre omocentrici tra loro).

Curve situate sopra quadriche a punti parabolici.

6. Data sopra una quadrica a punti parabolici (cono o cilindro) una curva sghemba qualsiasi, d'ordine n, priva di singolarità, *tra i circuiti della curva vi potrà essere un sol circuito d'ordine dispari* (e questo per n dispari), perchè, supposto che ve ne potessero essere p. es. due, passerebbero tutti e due per il vertice del cono, che quindi sarebbe punto doppio per la curva, mentre per ipotesi la curva è priva di singolarità.

I circuiti d'ordine pari della curva saranno, come ho già osservato, o di 1ª specie oppure monocentrici.

7. Tracciato un *circuito* chiuso d'ordine pari *di 1ª specie* sopra la quadrica, esso divide la superficie in due *regioni* S_1, S_2: dirò *esterna* al circuito quella S_2 che contiene il vertice del cono; *interna* l'altra S_1.

Si può osservare che ogni generatrice del cono passante per un punto della regione S_1 interna al circuito sega il circuito stesso in punti reali, mentre ciò non avviene necessariamente per tutte le generatrici passanti per punti della regione esterna S_2.

[1] Hilbert, *Reelle Züge algebraischer Curven.* Math. Ann., XXXVIII.

8. Fondandomi su questa proprietà, ho dimostrato il teorema:

Per una curva sghemba qualsiasi (e quindi anche col massimo numero di circuiti) d'ordine n ($n \geq 4$), *priva di singolarità, tracciata sopra una quadrica a punti parabolici, il numero dei circuiti d'ordine pari di 1ª specie, disposti in modo che il primo sia tutto situato nella regione interna al secondo, questo sia tutto situato nella regione interna al terzo e così di seguito, il penultimo sia tutto situato nella regione interna all'ultimo, non può superare il massimo intero contenuto in* $\frac{n}{4}$.

Applicando il metodo delle piccole variazioni, si prova, con qualche elaborazione, che *esistono sulla quadrica curve d'ordine n prive di singolarità, aventi una serie di circuiti di 1ª specie disposti nel modo detto, in numero uguale al massimo intero contenuto in* $\frac{n}{4}$.

9. Passando ai *circuiti* d'ordine pari *monocentrici*, senza difficoltà si vede che *una curva d'ordine n dispari, priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti parabolici, non può avere alcun circuito monocentrico*, perchè ogni circuito monocentrico supposto esistente segherebbe il circuito d'ordine dispari della curva almeno in un punto che sarebbe doppio per la curva, mentre questa, per ipotesi, è priva di singolarità.

Per n pari, osservando che la curva sega ogni generatrice della superficie in non più di $\frac{n}{2}$ punti reali, facilmente si vede che *il numero m dei circuiti monocentrici della curva non può superare* $\frac{n}{2}$.

Ora, delle intersezioni reali della curva con una generatrice della superficie $\left(\text{in numero pari o dispari insieme con } \frac{n}{2}\right)$, un numero pari viene assorbito dalle eventuali intersezioni con circuiti di 1ª specie: quindi risulta che m sarà della forma $m = \frac{n}{2} - 2\,s$ (con s numero intero $\geq o$). Distinguendo i casi $n = 4\,\nu$ e $n = 4\,\nu + 2$, si ha per conseguenza che, *per* $n = 4\,\nu$, *il numero m dei circuiti monocentrici sarà pari*; *per* $n = 4\,\nu + 2$ *invece, sarà dispari*.

Senza difficoltà si dimostra che *se la curva d'ordine n (pari) ha esattamente* $\frac{n}{2}$ *circuiti monocentrici, essa non potrà avere circuiti ulteriori*; ed *esistono effettivamente curve d'ordine n del tipo detto, composte di* $\frac{n}{2}$ *circuiti monocentrici*.

10. Da questa proprietà segue, senz'altro, che nel caso in cui *la curva d'ordine n (pari* ≥ 6*) abbia il massimo numero di circuiti*, ossia $\frac{1}{4}\,(n\text{-}2)^2 + 1$,

il numero dei circuiti monocentrici non può superare $\frac{n}{2} - 2$. Ho dimostrato che *esistono effettivamente curve di questo tipo con* $\frac{n}{2} - 2$ *circuiti monocentrici*.

Facendo un calcolo semplicissimo, si trova, inoltre che *una curva d'ordine n (pari o dispari) priva di singolarità, col massimo numero di circuiti, situata sopra una quadrica a punti parabolici, ha sempre un numero pari di circuiti di 1ª specie*.

11. Tornando ad una curva *qualsiasi* d'ordine n priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti parabolici, e supposto che essa abbia m ($> o$) circuiti monocentrici (quindi n pari), ed abbia inoltre una serie di l circuiti di 1ª specie, disposti in modo che il primo sia tutto contenuto nella regione interna al secondo, questo sia tutto contenuto nella regione interna al terzo e così di seguito, il penultimo sia tutto contenuto nella regione interna all'ultimo, senza difficoltà si trova che tra i numeri m ed l deve sussistere la relazione

$$2m + 4l \leq n.$$

Curve situate sopra quadriche a punti iperbolici.

12. Sopra una quadrica a punti iperbolici esistono, come ho già osservato, tanto circuiti d'ordine pari di 1ª specie, quanto circuiti d'ordine pari di 2ª specie.

Tracciato un circuito d'ordine pari di 1ª specie sopra la quadrica, esso, considerato come taglio, divide la superficie in due regioni S_1, S_2: una, S_2, nella quale si possono immaginare tracciati per intero dei circuiti d'ordine dispari; l'altra, S_1, in cui ciò non è possibile. Dirò *esterna* al circuito la regione S_2, *interna* al circuito la regione S_1.

Si può osservare, che ogni retta della superficie condotta per un punto della regione S_1, interna al circuito, sega il circuito stesso in almeno due punti reali, mentre nella regione esterna S_2 vi possono essere punti, per cui passano rette della superficie non seganti il circuito in alcun punto reale.

13. Ciò posto, con procedimenti analoghi a quelli adoperati per le curve situate sopra quadriche a punti parabolici, ho dimostrato i seguenti teoremi:

Per una curva sghemba qualsiasi (e quindi anche per una curva col massimo numero di circuiti), d'ordine n, ($n \geq 4$), priva di singolarità, tracciata sopra una quadrica a punti iperbolici, il numero l dei circuiti d'ordine pari di 1ª specie, disposti in modo che il primo sia tutto situato nella regione interna al secondo, questo sia tutto situato nella regione interna al terzo, e così di seguito, il penultimo sia tutto situato nella regione interna all'ultimo, non può superare il massimo intero contenuto in $\frac{n}{4}$. *Esistono effettivamente sulla quadrica curve d'ordine n*, $(n \geq 4)$, *prive di singolarità, aventi una serie di circuiti di 1ª specie, disposti nel modo detto, in numero uguale al massimo intero contenuto in* $\frac{n}{4}$.

14. Passando ai circuiti d'ordine pari di 2ª specie, si vede che, *se una curva priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti iperbolici, possiede circuiti d'ordine pari di 2ª specie, non potrà avere alcun circuito d'ordine dispari; e viceversa.*

Quindi, *una curva d'ordine n, dispari, priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti iperbolici, non può avere alcun circuito di 2ª specie.*

Se l'ordine n della curva è pari, si dimostra che *il numero dei circuiti di 2ª specie non può superare* $\frac{n}{2}$. *Esistono effettivamente curve di ordine n (pari) con* $\frac{n}{2}$ *circuiti di 2ª specie e nessun circuito ulteriore.*

15. Dicendo k_1 il numero delle intersezioni reali della curva d'ordine n con le rette dell'un sistema della quadrica, e k_2 $(\geq k_1)$ il numero delle intersezioni reali della curva con le rette dell'altro sistema (dove $k_1 + k_2 \leq n$ è evidentemente pari o dispari insieme con n), facilmente si vede che *il numero m dei circuiti di 2ª specie* (supposti esistenti: quindi n pari) *sarà pari o dispari insieme con* k_1 (e quindi k_2), e sarà $m \leq k_1$. Vuol dire che, in particolare, *per* k_1 *dispari (e n pari), esisterà certamente almeno un circuito di 2ª specie.*

16. Se $m = o$, si dimostra che, per n pari, la curva sega tanto le rette dell'un sistema quanto quelle dell'altro sistema della quadrica in un numero pari di punti: ossia saranno k_1 e k_2 pari, mentre per n dispari la curva sega le rette dell'un sistema in un numero pari di punti, e quelle dell'altro sistema in un numero dispari di punti.

Inoltre si dimostra che *tutti i circuiti d'ordine dispari della curva* (sia n pari o dispari) *segano le rette di uno stesso sistema della superficie in un numero dispari di punti, le rette dell'altro sistema in un numero pari* (anche nullo) *di punti* (¹).

17. Tornando al caso $m > o$ (n pari), e supponendo che il numero dei circuiti della curva sia massimo, si ha (per n pari) $k_1 = \frac{n}{2}$ (²), e dalle proprietà enunciate si deduce:

(¹) Per il caso che la curva abbia il massimo numero di circuiti, confronta Hilbert, loc. cit.

(²) Hilbert, loc. cit.

Una curva d'ordine n, priva di singolarità, col massimo numero di circuiti, situata sopra una quadrica a punti iperbolici, se n è dispari, non può avere alcun circuito di 2ª specie; se invece n è pari ($n \geq 6$), *potrà avere circuiti di 2ª specie in numero m pari* ($\geq o$) *per* $n = 4\nu$, *dispari* (≥ 1) *per* $n = 4\nu + 2$. *Questo numero non potrà superare* $\frac{n}{2} - 2$. *Per n pari e* $m > o$, *la curva non avrà circuiti d'ordine dispari. Esistono effettivamente curve d'ordine n pari* ($n \geq 6$) *del tipo detto, con* $\frac{n}{2} - 2$ *circuiti di 2ª specie.*

Inoltre il numero dei circuiti di 1ª specie della curva (sia per n pari, sia per n dispari) sarà sempre pari ($\geq o$).

18. Tornando ad una curva qualsiasi d'ordine n, priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti iperbolici, e supposto che essa abbia $m (> 0)$ circuiti di 2ª specie (quindi *n pari*), e che tra i circuiti residui di 1ª specie vi sia una serie di l circuiti disposti in modo che il primo sia tutto contenuto nella regione interna al secondo, questo sia tutto contenuto nella regione interna al terzo, e così di seguito il penultimo sia tutto contenuto nella regione interna all'ultimo, tra i numeri l ed m deve sussistere la relazione

$$m + 2l \leq k_1 \leq \frac{n}{2},$$

dove k_1 ha lo stesso significato come sopra.

19. Nel caso in cui n è *dispari* e in cui la curva abbia d circuiti d'ordine dispari e supponiamo che tra i circuiti residui di 1ª specie vi sia una serie di l circuiti, disposti nel modo detto sopra, tra l e d si ha la relazione

$$d + 4l \leq n.$$

20. Se la curva ha il massimo numero di circuiti, si trova una disuguaglianza ancora più espressiva: basta proiettare la curva sopra un piano da un punto della quadrica situato nella regione interna al primo dei circuiti della serie considerata, e seguire un procedimento analogo a quello adoperato da Hilbert [1] per trovare un limite per il numero d dei circuiti d'ordine dispari d'una curva col massimo numero di circuiti. Così senza difficoltà si trova:

$$d + 2l \leq k_1.$$

[1] Hilbert, loc. cit.

Ora, siccome la curva ha il massimo numero di circuiti, per n pari è $k_1 = \frac{n}{2}$, per n dispari $k_1 = \frac{n \pm 1}{2}$ [1]; e, staccando i casi,

$$n = 4\nu \;,\; n = 4\nu + 1 \;,\; n = 4\nu + 2 \;,\; n = 4\nu + 3 \,,$$

si trova:

Una curva d'ordine n, ($n \geq 6$), priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti iperbolici, e avente il massimo numero di circuiti, tra cui una serie di l (≥ 1) circuiti disposti in modo che il primo sia situato tutto nella regione interna al secondo, il secondo tutto nella regione interna al terzo, e così di seguito il penultimo tutto nella regione interna all'ultimo, non potrà avere più di d circuiti d'ordine dispari:

$$\begin{aligned}
&d \leq 2\nu - 2l, &&(l \geq 1), \text{ per } n = 4\nu. &&(\nu \geq 2)\\
&d \leq 2\nu + 1 - 2l, &&(l \geq 1), \text{ per } n = 4\nu + 1, &&(\nu \geq 2)\\
&d = o, && \text{per } n = 4\nu + 2 \ (^2) &&\\
&d \leq 2\nu + 1 - 2l, &&(l \geq 1), \text{ per } n = 4\nu + 3, &&(\nu \geq 1).
\end{aligned}$$

. . . .

21. I risultati che formano l'argomento di questa Nota si possono estendere alle curve situate sopra coni e rigate d'ordine n; estensione di cui mi sto ora occupando.

Matematica. — *Su un teorema relativo agli integrali doppii.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio S. Pincherle [3].

Nel 1907 io avevo enunciato in questi Rendiconti un teorema che riduce il calcolo di un integrale superficiale a quello di un integrale doppio (iterato).

In una Nota recente ho enunciato il teorema reciproco, senza avvertire che nel 1909 (questi Rendiconti, 2° sem.) il prof. Tonelli aveva, a proposito di alcune sue ricerche *Sull'integrazione per parti*, dato un teorema, che è affatto equivalente a quello da me enunciato soltanto ora.

Credo quindi mio dovere riprodurre qui l'enunciato del prof. Tonelli:

Una funzione $f(x, y)$ misurabile superficialmente, per cui esista

$$\int_a^x dx \int_b^y |f(x, y)| \, dy \,,$$

è integrabile superficialmente; e per essa vale la

$$\int_a^x dx \int_b^y f(x, y) \, dy = \int_a^x \int_b^y f(x, y) \, dx \, dy = \int_b^y dy \int_a^x f(x, y) \, dx \,.$$

[1] Hilbert, loc. cit.

[2] Hilbert, loc. cit.

[3] Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1913.