ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Fisica. — *Sopra il fenomeno di Stark-Lo Surdo.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. Le singole righe emesse da un gas ionizzato si scindono in tre e in cinque se il vibratore si trova in un campo elettrico intenso.

Nel caso più favorevole le tre righe mediane risultanti dalla decomposizione vibrano perpendicolarmente al campo e le due esterne parallelamente ad esso. Ma alle volte le tre mediane si riuniscono in una sola.

Le condizioni opportune per l'osservazioni del fenomeno si possono realizzare portando gli ioni in un campo indipendente da quello in cui procede la *Glimmentladung* (1), oppure ricorrendo ad un tubo di scarica sottile. In quest'ultimo lo spazio catodico oscuro, nel quale si verifica quasi per intero la caduta di potenziale, è estremamente breve, ed è grande dunque la forza (2).

2. Il fenomeno ha un grande interesse teorico, in quanto permette di confrontare uno con l'altro i due modelli proposti per la struttura degli atomi materiali da J. J. Thomson e da Rutherford.

Nel primo, com'è noto, gli elettroni stanno immersi in una sfera di elettricità positiva e le forze sono di tipo quasi elastico; nel secondo gli elettroni girano intorno al nucleo e le forze sono newtoniane.

È evidente *a priori* che il modello di Thomson, nella sua forma originaria, non può rendere conto del fenomeno di Stark-Lo Surdo. Il campo muta la posizione di equilibrio dell'unico elettrone, ma le piccole oscillazioni si fanno sempre nelle condizioni di prima.

Analiticamente, al secondo membro dell'equazione

$$d^2x/dt^2 = -kx$$

si deve aggiungere un termine costante, e si ottiene così

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= -kx + C\,, \\ &= -k(x - C/k)\,, \end{aligned}$$

e basta prendere per variabile, in luogo di x, la $x - C/k$ perchè l'equazione ritrovi la forma primitiva.

Ma il modello si può generalizzare, come avvertiva il Voigt, molti anni or sono (3), sostituendo al termine $-kx$ una serie ordinata secondo le potenze crescenti di x.

(1) J. Stark, Sitz. Ber. der K. Preuss. Ak. der Wiss., 47, pag. 932, 1913.
(2) A. Lo Surdo, Rend. R. Accad. dei Lincei, 22 (2), pag. 664, 1913.
(3) W. Voigt, Ann. der Physik (4), 4, pag. 197, 1901.

Il significato fisico della posizione è immediatamente chiaro. L'ipotesi del Voigt corrisponde infatti ad ammettere che nella sfera positiva l'elettricità non sia distribuita uniformemente, ma che anzi la densità (ϱ) risulti funzione della sola distanza dal centro (r).

In questo caso la forza che agisce su l'elettrone avrà la forma

$$E = -\frac{4\pi e}{r^2}\int_0^r r^2 \varrho \, dr ,$$

o, se si pone

$$\varrho = \varrho_0 + r\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_0 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right)_0 + \cdots ,$$

$$E = -4\pi e\left[\frac{\varrho_0}{3} r + \frac{1}{4}\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_0 r^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right)_0 r^3 + \cdots\right];$$

sicchè le equazioni del moto diventeranno

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{4\pi e}{m}\left[\dfrac{\varrho_0}{3} r + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{d\varrho}{dr}\right)_0 r^2 + \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{d^2\varrho}{dr^2}\right)_0 r^3 + \cdots\right]\dfrac{x}{r} , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ma per salvare il fenomeno di Zeeman bisogna ammettere che almeno le oscillazioni piccolissime intorno al centro di figura si facciano in uno spazio a densità costante. Questo porta ad annullare la prima derivata di ϱ rispetto ad r, nel centro della sfera; e si ottiene dunque, tralasciando tutti i termini a partire dal quarto,

$$\begin{cases} d^2x/dt^2 = -4\pi e/m . [\varrho_0/3 . r + 1/10 . (d^2\varrho/dr^2)_0 \, r^3] . x/r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

che sono appunto le equazioni del Voigt.

Non vi è bisogno di portare il calcolo in fondo per persuadersi che questa terna non può dare il fenomeno di Stark-Lo Surdo.

Il campo esterno sposta l'elettrone e lo fissa in una posizione eccentrica. Intorno a questa si compiono i movimenti oscillatorii. Si capisce che le condizioni sono diverse per i moti radiali (paralleli al campo) e per i tangenziali (normali ad esso), ma si vede subito che gli uni e gli altri procedono in un mezzo che ha una densità media diversa nello stesso senso da quella relativa al centro (più grande in entrambi i casi o più piccola).

Le due righe che risultano dall'azione del campo sono dunque spostate *dalla stessa parte* rispetto alla primitiva.

Per ottenere in qualche modo il fenomeno bisognerebbe ammettere che in una parte degli atomi la seconda derivata di ϱ per rapporto ad r nel centro sia positiva, in altri negativa e in altri nulla. Ma l'ipotesi non sembra verisimile.

3. Il modello di Rutheford, almeno nella forma nella quale fu posto da Bohr [1], permette invece di prevedere il caso più semplice osservato da Stark e Lo Surdo.

Il Bohr assimila il processo dell'emissione della luce al fatto astronomico della cattura delle comete. Un elettrone libero viene attirato da un nucleo positivo; mentre l'avvicinamento dura, l'energia potenziale del sistema diminuisce, e se la particella arriva alla distanza a dal centro attraente, la diminuzione importa

$$-\int_{\infty}^{a} \mathrm{E}e/r^2 . dr = \mathrm{E}e/a .$$

Dopo la cattura il moto è, almeno in prima approssimazione, circolare, e l'energia cinetica ha l'espressione

$$\mathrm{E}e/2a$$

perchè

$$mv^2/a = \mathrm{E}e/a^2 .$$

La differenza

$$\mathrm{W} = \mathrm{E}e/a - \mathrm{E}e/2a = \mathrm{E}e/2a$$

rappresenta dunque *la quantità di energia che bisognerebbe dare al sistema per spezzarlo, riportando l'elettrone a grande distanza.* O, se si vuole, è anche *l'energia che il sistema può cedere per radiazione quando l'elettrone viene catturato.*

In accordo con la teoria di Planck il Bohr suppone che sia

$$\mathrm{W} = nh\nu ,$$

o anche (ipotesi ulteriore)

$$\mathrm{W} = nh\omega/2 ,$$

ove con ω si indichi la frequenza del moto di rivoluzione.

Viene subito

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{W}_n &= \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} , \\ \omega_n &= \frac{4\pi^2 m e^4}{n^3 h^3} , \\ a_n &= \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2} ; \end{aligned} \right.$$

in queste si è supposto che le cariche del nucleo e dell'elettrone siano uguali, la quale condizione sarebbe caratteristica dell'atomo dell'idrogeno.

[1] N. Bohr, Phil. Mag. (6), 26, pag. 1, 1913.

Ciò posto, in causa di urti o di altre perturbazioni, il sistema potrà *saltare* dall'una all'altra condizione di equilibrio; nel momento del passaggio si avrà una emissione di luce, con la frequenza ν data dalla

$$\nu_{q,p} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right). \tag{2}$$

Se l'emissione si suppone avvenuta nel campo elettrico la risoluzione in una terna (che è il caso corrispondente alle forze deboli) risulta immediatamente chiara.

Quando l'elettrone durante la cattura procede secondo la direzione del campo, la forza esterna coopera (o contrasta) con la forza attrattiva del nucleo; il lavoro compiuto riesce così aumentato (o diminuito) di una quantità che indicheremo provvisoriamente con ε.

L'espressione della W diventa dunque

$$W = Ee/2a \pm \varepsilon$$

e si ottiene successivamente

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(2\pi a\omega)^2}{2} = \frac{Ee}{2a} = W \mp \varepsilon, \tag{3}$$

e però

$$\omega = \frac{\sqrt{2}(W \mp \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\pi \sqrt{m}\, Ee}, \tag{4}$$

mentre è ancora, come dianzi,

$$W = \frac{nh\omega}{2}. \tag{5}$$

Risolvendo le (3), (4) e (5) rispetto a W, ω ed a si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} W_n &= \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} \pm 3\varepsilon, \\ \omega_n &= \frac{4\pi^2 m e^4}{n^3 h^3} \pm \frac{6}{nh}\varepsilon, \\ a_n &= \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2} \mp \frac{n^4 h^4}{4\pi^4 m^2 e^6}\varepsilon, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

le quali ultime tengono nel caso nostro il luogo delle (1) e sono già scritte per $E = e$.

La terza delle (6) ci dice che ogni orbita possibile si sdoppia; ma le nuove sono estremamente vicine alla vecchia.

La lunghezza, $l_{q,p}$, del passaggio dall'una all'altra condizione di equilibrio si potrà dunque calcolare con la forma approssimata

$$l_{q,p} = a_q - a_p = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}(q^2 - p^2). \tag{7}$$

Secondo che il salto è favorito o contrastato dal campo (F) si avrà così l'una o l'altra delle due righe

$$\nu_{q,p} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) \pm \frac{3}{h}(\varepsilon_p - \varepsilon_q); \tag{8}$$

con

$$\varepsilon_p - \varepsilon_q = \mathrm{F} e\, l_{q,p}\,. \tag{9}$$

Per un campo di 13000 Volt per centimetro, e per la riga verde azzurra dello spettro dell'idrogeno, la larghezza del doublet risulta di

$$3{,}1\,,$$

unità Ångstrom; lo Stark trova 3,6.

Matematica. — *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano.* Nota II di S. Catania, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

La classe $\mathrm{Op}(u\,,v)$ è identica alla classe $v\,\mathrm{f}\,u$ del *Formulario* di G. Peano:

$$u\,,v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\cdot\supset.\therefore f\,\varepsilon\,v\,\mathrm{f}\,u =: x\,\varepsilon\,u \cdot\supset_x\cdot f x\,\varepsilon\,v\,, \tag{β}$$

come la classe $\mathrm{F}(u\,,v)$ è identica alla classe $v\,\mathrm{F}\,u$ (*functio definita*) della ediz. IV del *Formulario*, pag. 126. La (β) è perfettamente regolare, e la obiezione fatta a proposito di essa cessa di sussistere appena si sia introdotta l'idea primitiva grafica di operatore [1]. Come pure, in virtù della (4), non si può negare [2] agli elementi di $v\,\mathrm{f}\,u$ la proprietà di eguaglianza, sia perchè dalla (β) risulta che $v\,\mathrm{f}\,u$ è classe, e per le classi si considera la eguaglianza; sia perchè la definizione di Leibniz *può* stabilire la condizione $x = y$, qualunque sia la specie di x ed y; ed è chiaro che se l'eguaglianza (o, meglio, *identità*) *può* essere logicamente considerata in modo generale, essa *deve* essere considerata così, e non altrimenti.

[1] Invero la (β) contiene di *non definito* il solo simbolo composto fx (o meglio la preposizione di f ad x); e la proposizione condizionale $f x\,\varepsilon\,v$ *caratterizza la funzione monodroma, o corrispondenza univoca.*

[2] *Formulario*, tom. IV, pag. 27; tom. V, pag. 80.