ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

La lunghezza, $l_{q,p}$, del passaggio dall'una all'altra condizione di equilibrio si potrà dunque calcolare con la forma approssimata

$$l_{q,p} = a_q - a_p = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}(q^2 - p^2). \tag{7}$$

Secondo che il salto è favorito o contrastato dal campo (F) si avrà così l'una o l'altra delle due righe

$$\nu_{q,p} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) \pm \frac{3}{h}(\varepsilon_p - \varepsilon_q); \tag{8}$$

con

$$\varepsilon_p - \varepsilon_q = \mathrm{F} e\, l_{q,p}\,. \tag{9}$$

Per un campo di 13000 Volt per centimetro, e per la riga verde azzurra dello spettro dell'idrogeno, la larghezza del doublet risulta di

$$3{,}1\,,$$

unità Ångstrom; lo Stark trova 3,6.

Matematica. — *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano.* Nota II di S. Catania, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

La classe $\mathrm{Op}(u\,,v)$ è identica alla classe $v\,\mathrm{f}\,u$ del *Formulario* di G. Peano:

$$u\,,v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\cdot\supset\therefore f\,\varepsilon\,v\,\mathrm{f}\,u = : x\,\varepsilon\,u \cdot\supset_x\cdot f x\,\varepsilon\,v\,, \tag{β}$$

come la classe $\mathrm{F}(u\,,v)$ è identica alla classe $v\,\mathrm{F}\,u$ (*functio definita*) della ediz. IV del *Formulario*, pag. 126. La (β) è perfettamente regolare, e la obiezione fatta a proposito di essa cessa di sussistere appena si sia introdotta l'idea primitiva grafica di operatore [1]. Come pure, in virtù della (4), non si può negare [2] agli elementi di $v\,\mathrm{f}\,u$ la proprietà di eguaglianza, sia perchè dalla (β) risulta che $v\,\mathrm{f}\,u$ è classe, e per le classi si considera la eguaglianza; sia perchè la definizione di Leibniz *può* stabilire la condizione $x = y$, qualunque sia la specie di x ed y; ed è chiaro che se l'eguaglianza (o, meglio, *identità*) *può* essere logicamente considerata in modo generale, essa *deve* essere considerata così, e non altrimenti.

[1] Invero la (β) contiene di *non definito* il solo simbolo composto fx (o meglio la preposizione di f ad x); e la proposizione condizionale $fx\,\varepsilon\,v$ *caratterizza la funzione monodroma, o corrispondenza univoca.*

[2] *Formulario*, tom. IV, pag. 27; tom. V, pag. 80.

Le due classi $\mathrm{Op}(u, v)$, $\mathrm{F}(u, v)$, pur dipendendo, nel modo indicato, l'una dall'altra, presentano una differenza che interessa di fare rilevare in vista di quanto dovremo dire a riguardo della *functio definita* del *Formulario*. La differenza è questa: « se u' è una classe formata con gli u, allora, mentre ogni $\mathrm{Op}(u, v)$ è pure un $\mathrm{Op}(u', v)$, le due classi $\mathrm{F}(u, v)$, $\mathrm{F}(u', v)$ non hanno elementi in comune ». In altri termini: un elemento f di $\mathrm{Op}(u, v)$ non è invariabilmente collegato con la classe u su cui opera, potendo il *campo di applicazione* essere u, o una classe contenuta in u, o anche contenente u [1]; l'elemento f che resta determinato [cfr. (8), (8')] da una w di $\mathrm{F}(u, v)$ viene, invece, dalla w stessa, collegato invariabilmente con il campo di variazione u.

Da questa differenza tra $\mathrm{Op}(u, v)$ e $\mathrm{F}(u, v)$, o, secondo le notazioni del *Formulario*, tra $v f u$ e $v \mathrm{F} u$, e dalla *apparente* (e vedremo perchè) *necessità* di collegare un operatore con il suo campo di variabilità, è risultata nel *Formulario* la definizione di *functio definita*. Data la (α), indipendentemente dal concetto di operatore, e pur essendo necessario di introdurre l'usuale operatore (sen, log, ...), si è stabilito [2]:

$$(\varepsilon) \qquad u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot w \,\varepsilon\, \mathrm{F}(u, v) \cdot x \,\varepsilon\, u \cdot \supset \cdot wx = \iota y \ni \{(x ; y) \,\varepsilon\, w\}.$$

Le osservazioni da fare sono varie. Scrivendo wx si introduce il concetto grafico di scrivere a sinistra di x un simbolo, il w, e poichè si introduce, tanto vale introdurlo prima, e dare la (1). Ma w ha già significato preciso, è un $\mathrm{F}(u, v)$, cioè è una *classe* di *coppie*; e in virtù di quale legge logica w può essere identificato a un *ente semplice* [3], come sen, log, ...? Con la (ε) si viene a dare, in sostanza, nel campo u, questa proposizione:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot f \,\varepsilon\, \mathrm{Op}\, u \cdot w = (x ; fx) | x \text{`} u \cdot \supset \cdot f = w,$$

il che non è ammissibile, sia perchè f e w sono enti di *specie diversa*, sia perchè w è definibile mediante f.

Dalla (ε) risulta che [4]

$$\mathrm{F}(u, v) \supset \mathrm{Op}(u, v),$$

il che, pure, non è ammissibile, perchè $\mathrm{F}(u, v)$ è una *classe di classi* (di coppie) e $\mathrm{Op}(u, v)$ è una classe (non di coppie); e del resto, se si ammette, allora un $\mathrm{F}(u, v)$, considerato come operatore [con la (ε)], è collegato con il campo di variabilità u; ma $\mathrm{F}(u, v)$ è anche un $\mathrm{Op}(u, v)$, quindi non è più collegato con il campo di variabilità.

(1) C. Burali-Forti, (III).
(2) Tom. IV.
(3) C. Burali-Forti, (II).
(4) *Formulario*, tom. IV, pag. 127.

Si può concludere che mentre l'ente $v \mathrm{f} u$ del *Formulario* è logicamente perfetto e rappresenta nel modo più semplice il concetto di *funzione monodroma* o di *corrispondenza univoca*, l'ente $v \mathrm{F} u$, sebbene perfetto come *classe*, non può dare la funzione nè *ordinaria*, nè *definita*, intendendo che la parola *definita* indichi che il simbolo di funzione determina pure il campo di variabilità. Tale collegamento del simbolo di funzione con il campo di variabilità non può essere ottenuto se non si rinunzia alle forme usuali di scrittura come $\mathrm{sen}\, x$, $\log x$, ... semplici e così feconde di applicazione, poichè un operatore per gli u sarà sempre un operatore per classi formate con gli u [1].

Del resto, come abbiamo indicato, la necessità della $v \mathrm{F} u$ è soltanto apparente. Nel *Formulario*, $v \mathrm{F} u$ comparisce talvolta come classe [2], e in tal caso basta sostituirlo con $\mathrm{F}(u, v)$, cioè considerare $v \mathrm{F} u$ come classe quale è definita dalla (α); talvolta come funzione [3], e in tal caso basta sostituirlo con $v \mathrm{f} u$, salvo qualche necessaria modificazione nelle notazioni. Così, nelle proposizioni in cui comparisce la derivata, D, in luogo, ad es., di $f \varepsilon \mathrm{q F} a \mathrel{\vdash\!\dashv} b$ basta sostituire $f \varepsilon \mathrm{q f} a \mathrel{\vdash\!\dashv} b$, e a $\mathrm{D} fx$ sostituire $\mathrm{D}(f, a \mathrel{\vdash\!\dashv} b)$. Del resto, posto che f sia un $\mathrm{q F} a \mathrel{\vdash\!\dashv} b$ non cessa di essere un $q \mathrm{f} a \mathrel{\vdash\!\dashv} b$, e quindi $\mathrm{D} fx$ è notazione sempre incompleta, perchè in $\mathrm{D} f$ non comparisce il campo $a \mathrel{\vdash\!\dashv} b$ di *variabilità* di x, o *campo* di *applicazione* di f, ed è noto che la derivata dipende dalla funzione e dal campo in cui essa opera.

Giova osservare esplicitamente che anche i *complessi d'ordine* n si ottengono senza che vi sia bisogno di ricorrere alla *functio definita*.

Se n è un N_1 e u una classe qualunque, allora $\mathrm{F}(1 \cdots n, u)$ può stare al posto di *complesso d'ordine* n *formato con gli* u, ovvero *sistema di* n *elementi di* u. Invero, se a è un $\mathrm{F}(1 \cdots n, u)$, allora, per la (6), esiste un operatore f tale che a è classe i cui elementi sono le coppie

$$(1; f1), (2, f2), \ldots, (n, fn),$$

e $f1, f2, \ldots, fn$ sono appunto gli n elementi di u che individuano a. Secondo le notazioni usuali, giova indicare con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gli elementi del complesso a; vale a dire giova porre per definizione:

$$n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cdot r \varepsilon 1 \cdots n \cdot u \varepsilon \mathrm{Cls} \cdot a \varepsilon \mathrm{F}(1 \cdots n, u) \cdot \supset \cdot a_r = \iota u \cap x \ni \{(r; x) \varepsilon a\},$$

eliminando così del tutto la notazione inesatta $a1, a2, \ldots, an$, ove la *classe*

[1] Cfr. G. Peano, (V), pag. 8, per il segno X o $\downarrow$; e C. Burali-Forti, (III), pag. 10, rispetto all'*inutilità* del segno di *prodotto funzionale* tra f ed x in fx. Nell'ediz. III del *Formulario*, e nell'ediz. V, la *functio definita* è introdotta mediante le coppie formate da un $\mathrm{Op}(u, v)$ e da u; le osservazioni precedenti si possono ripetere quasi integralmente.

[2] Es. ed. V: § 4, 1·2; § 16, 4; § 23, 2·1·4; § 24, 1·0; § 25, 1·0·1, 2·1·2·4·5; ecc.

[3] § D, § S.

di coppie a viene a funzionare da *operatore*. Segue che la definizione di *numero complesso d'ordine n*, $\mathrm{Cx}\, n$, del *Formulario*, assume la forma regolare:

$$n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \cdot \supset \cdot \mathrm{Cx}\, n = \mathrm{F}(1 \cdots n\,, \mathrm{q})\,,$$

e tutte le proposizioni del *Formulario* relative a tale argomento continuano a sussistere.

Zoologia. — *Nuovi contributi alla metamorfosi dei Murenidi.* Memoria del Socio B. Grassi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica. — *Criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

La teoria delle equazioni integrali del Volterra, generalizzata ai sistemi di equazioni integrali lineari, permette, evidentemente, di ricondurre ad essa la trattazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine. Cotesta circostanza è stata da me sfruttata nella ricerca di condizioni sufficienti di stabilità per moti stazionarî di prima specie. Mediante speciali accorgimenti sono pervenuto a stabilire alcuni criterî di estrema semplicità e di immediata applicazione.

Come ho detto, qui considero soltanto moti stazionarî di prima specie (nel senso che verrà appresso definito) riserbando per una prossima pubblicazione alcune ricerche sul problema generale della stabilità del movimento. Più precisamente, suppongo, qui, che il sistema di equazioni differenziali del primo ordine, al quale intendo ricondotto il nostro studio, sia un sistema *lineare, ed omogeneo, a coefficienti costanti*, come avviene, nel caso di moti stazionarî, per il sistema della prima approssimazione nel problema generale della stabilità [1], cioè

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n\,, \end{cases}$$

[1] Vedasi: A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement* Ann. de la Fac. des Sciences de l'Université de Toulouse, 1907, pag. 267.