ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

di coppie a viene a funzionare da *operatore*. Segue che la definizione di *numero complesso d'ordine n*, $\mathrm{C}\times n$, del *Formulario*, assume la forma regolare:

$$n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cdot \supset \cdot \mathrm{C}\times n = \mathrm{F}(1 \cdots n, \mathrm{q}),$$

e tutte le proposizioni del *Formulario* relative a tale argomento continuano a sussistere.

Zoologia. — *Nuovi contributi alla metamorfosi dei Murenidi.* Memoria del Socio B. Grassi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica. — *Criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

La teoria delle equazioni integrali del Volterra, generalizzata ai sistemi di equazioni integrali lineari, permette, evidentemente, di ricondurre ad essa la trattazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine. Cotesta circostanza è stata da me sfruttata nella ricerca di condizioni sufficienti di stabilità per moti stazionarî di prima specie. Mediante speciali accorgimenti sono pervenuto a stabilire alcuni criterî di estrema semplicità e di immediata applicazione.

Come ho detto, qui considero soltanto moti stazionarî di prima specie (nel senso che verrà appresso definito) riserbando per una prossima pubblicazione alcune ricerche sul problema generale della stabilità del movimento. Più precisamente, suppongo, qui, che il sistema di equazioni differenziali del primo ordine, al quale intendo ricondotto il nostro studio, sia un sistema *lineare, ed omogeneo, a coefficienti costanti*, come avviene, nel caso di moti stazionarî, per il sistema della prima approssimazione nel problema generale della stabilità [1], cioè

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\[2mm] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm] \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n, \end{cases}$$

[1] Vedasi: A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement* Ann. de la Fac. des Sciences de l'Université de Toulouse, 1907, pag. 267.

dove le p_{si} $(s, i = 1, 2, \dots, n)$ sono costanti assegnate. Giova, quindi, ricordare, sia pure incidentalmente, che, anche nel caso di moti stazionarî, qualora si tratti di prima approssimazione, lo studio dell'approssimazione stessa (quantunque, di per sè, già di grandissima importanza) non sempre basta per il problema generale, come ha mostrato il Liapounoff nella sua classica Memoria. Ed è per questo che ho ritenuto opportuno di attribuire la denominazione di « prima specie » ai moti stazionarî che vengono qui considerati.

Infine, giova osservare, a proposito dello strumento analitico da me adottato nella suddetta ricerca, come non sia, almeno presentemente, da escludere che un procedimento più sbrigativo possa condurre agli stessi criterî di stabilità. Anzi non è, almeno presentemente, da escludere che possa aversi un procedimento più sbrigativo e, in pari tempo, di natura più prossima a quella del problema, giacchè lo studio dei moti stazionarî considerati dipende, come è noto, dallo studio delle radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \omega, & p_{12} & , \dots, & p_{1n} \\ p_{21} & , p_{22} - \omega, & \dots, & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & , p_{n2} & , \dots, & p_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

cioè dallo studio di un'equazione algebrica. Il primo criterio, al quale sono pervenuto, può effettivamente anche aversi, come mi fa osservare il sig. professore Levi-Civita, mediante il procedimento semplice e sbrigativo che qui appresso esporremo, ma l'idea informativa del procedimento medesimo (come ho avuto cura di mostrare allo stesso prof. Levi-Civita) viene a mancare nei riguardi degli altri criterî da me ottenuti. Tuttavia rimando ad altra pubblicazione le dimostrazioni relative a cotesti ulteriori criterî.

Primo criterio.

Indichiamo con $-\lambda$ una quantità $>$ della oppure $=$ alla più grande fra le costanti p_{ii} $(i = 1, 2, \dots, n)$, od eventualmente una quantità $>$ del oppure $=$ al valore comune delle medesime, e con μ una quantità $>$ del oppure $=$ al massimo, od eventualmente $>$ del oppure $=$ al valore comune, dei valori assoluti delle costanti p_{ij} per i diverso da j $(i \neq j\ ;\ i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Qualora sia

$$\lambda - (n-1)\mu \geq 0,$$

ogni soluzione del sistema (1) *è certamente stabile* [1].

[1] È implicitamente inteso, sia qui che appresso, che si parla di stabilità nel futuro.

Infatti, si consideri la forma quadratica

$$f = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} p_{rs}\, x_r\, x_s\,.$$

Avremo

$$f \leq \mu \{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\}^2 + \sum_{r=1}^{n} (p_{rr} - \mu)\, x_r^2\,.$$

Quindi

$$f \leq \mu \{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\}^2 - (\lambda + \mu) \sum_{r=1}^{n} x_r^2\,.$$

Ma, detta σ la somma $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, si ha che la $\sum_{r=1}^{n} x_r^2$ non può essere inferiore ad $n\left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Ora, se $\lambda + \mu \geq 0$, avremo certo

$$f \leq \left(\mu - \frac{\lambda + \mu}{n}\right) \sigma^2\,.$$

Ne viene che, qualora si abbia $\lambda - (n-1)\,\mu \geq 0$, sarà $f \leq 0$, cioè la forma quadratica f sarà o semidefinita negativa o definita negativa.

Ora, dalla

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_j\,,$$

moltiplicando per x_i e poi sommando rispetto all'indice i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{dS_2}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i\, x_j\,,$$

dove S_2 designa la somma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Talchè, qualora sia $\lambda - (n-1)\,\mu \geq 0$, avremo che la S_2 non può crescere al crescere di t. Quindi, pensando alla forma delle soluzioni del sistema (1), resulta che, allora, ogni soluzione del sistema medesimo sarà certamente stabile.

Successivi criterî.

I. S'intenda $-\lambda_{\alpha\alpha} \geq p_{\alpha\alpha}$ ed inoltre $\mu_{\alpha\alpha} >$ del oppure $=$ al massimo, od eventualmente $>$ del oppure $=$ al valore comune, dei valori assoluti delle quantità $\frac{p_{s\alpha}\, p_{\alpha i}}{p_{\alpha\alpha}}$ (dove $i, s = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n$).

Qualora (almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α) si abbia simultaneamente

$$\begin{cases} p_{\alpha\alpha}\, p_{si} - p_{s\alpha}\, p_{\alpha i} = 0 \\ \lambda_{\alpha\alpha} - (n-1)\,\mu_{\alpha\alpha} > 0\,, \end{cases} \qquad (s, i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n)$$

ogni soluzione del sistema (1) *è certamente stabile.*

II. Sia $p_{ii} \neq p_{rr}$ $(i \neq r\ ;\ i, r = 1, 2, \ldots, n)$.

La maggiore fra le costanti p_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ venga indicata con $p_{\varepsilon\varepsilon}$. Inoltre, si designi con ν una quantità $>$ del oppure $=$ al massimo, od eventualmente $>$ del oppure $=$ al valore comune, dei valori assoluti delle quantità p_{sj}, $\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon j}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}}$, $\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon s}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}}$ (intendendo $j \neq s\ ;\ j, s = 1, 2, \ldots, \varepsilon - 1, \varepsilon + 1, \ldots, n$) [1]. Infine sia $-\lambda \geq p_{\varepsilon\varepsilon}$.

Qualora sia $p_{ii} \neq p_{rr}$ $(i \neq r\ ;\ i, r = 1, 2, \ldots, n)$, *ed inoltre si abbia*

$$\lambda - (n - 1)\, \nu \geq 0\,,$$

ogni soluzione del sistema (1) *è certamente stabile.*

III. Sia $p_{ii} \neq p_{rr}$ $(i \neq r\ ;\ i, r = 1, 2, \ldots, n)$.

Sia, inoltre, μ_α una quantità $>$ della oppure $=$ alla massima, od eventualmente $>$ del oppure $=$ al valore comune, delle quantità positive

$$\left| \frac{p_{s\alpha}\, p_{\alpha s}}{p_{\alpha\alpha} - p_{ss}} \right|, \quad |p_{sj}| + \left| \frac{p_{s\alpha}\, p_{\alpha j}}{p_{\alpha\alpha} - p_{ss}} \right|,$$

(intendendo $j \neq s\ ;\ j, s = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n$). Infine sia $-\lambda$ una quantità superiore oppure eguale alla più grande fra le costanti p_{rr} $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Qualora sia $p_{ii} \neq p_{rr}$ $(i \neq r\ ;\ i, r = 1, 2, \ldots, n)$, *ed inoltre* (*almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice* α) *sia*

$$\lambda - (n - 1)\, \mu_\alpha \geq 0\,,$$

ogni soluzione del sistema (1) *è certamente stabile.*

Come ho già detto, rimando ad altra pubblicazione le dimostrazioni relative a questi successivi criterî.

[1] Nel caso $n = 2$, sarà, delle quantità p_{sj}, $\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon j}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}}$, $\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon s}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}}$, diversa da zero soltanto la $\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon s}}{p_{\varepsilon\varepsilon} - p_{ss}}$