ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.*
Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. — PRÉLIMINAIRES.

Les fonctions permutables dont il s'agit ici, sont les fonctions permutables de 1ère espèce. J'exposerai dans cette Note une méthode nouvelle résolvant simplement le problème suivant:

Étant donnée une fonction $f(x, y)$ analytique régulière autour de l'origine ($x=0$, $y=0$), déterminer toutes les fonctions analytiques régulières autour de l'origine et permutables avec elle.

Ce problème est résolu par M.r Volterra [1] dans le cas où la fonction donnée est d'ordre 1 ou d'ordre 2 autour de l'origine. J'ai étendu sa méthode au cas où la fonction est d'ordre n [2]. Ce sera le cas où, $f(x, y)$ admettant exactement $(y-x)^{n-1}$ en facteur, le développement en série de Taylor du quotient commence par un terme constant non nul [3]. Mais il est des fonctions analytiques très simples qui ne sont d'aucun ordre autour de l'origine: par exemple la fonction

$$ax + by \qquad \text{avec } a + b \neq 0;$$

pour de telles fonctions le problème n'est pas résolu. La méthode que je vais donner s'applique aussi bien à ces fonctions qu'à celles qui sont d'un ordre déterminé.

D'ailleurs, même dans le cas des fonctions d'ordre déterminé, le 2 méthodes répondent au même problème de façons suffisamment différentes pour ne pas faire double emploi. La méthode de M.r Volterra est une méthode qui transforme le problème dans une équation intégro-différentielle; elle répond à la question par une série exponentiellement convergente, très commode pour les applications. La méthode que je vais indiquer donne une forme nécessaire et suffisante du développement en série de Taylor des fonctions cherchées.

(1) Rend. R. Accad. Lincei, 1er sem. 1910, pag. 425, et 1er sem. 1911, pag. 296; *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, 1913), chap. XI. Le problème que traite M.r Volterra est même plus général que celui ici posé: il ne se restreint pas aux fonctions analytiques.

(2) Comptes-rendus, 1er sem. 1913.

(3) On constate sans peine ce fait en se reportant aux conditions données par M.r Volterra [loc. cit.] pour que la fonction soit d'ordre n, conditions qui doivent être vérifiées autour de l'origine.

§ 2. — Un théorème sur les fonctions permutables.

Soit $\varphi(x, y)$ une des fonctions cherchées; on doit avoir

$$(1) \qquad \int_x^y \left\{ f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y) - \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y) \right\} d\xi = 0,$$

d'où, en dérivant $p+1$ fois par rapport à y;

$$\sum_0^p{}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left\{ f(x, y)\, \varphi_{p-i}(y, y) - \varphi(x, y)\, f_{p-i}(y, y) \right\} +$$
$$+ \int_x^y \left\{ f(x, \xi)\, \varphi_{p+1}(\xi, y) - \varphi(x, \xi)\, f_{p+1}(\xi, y) \right\} d\xi = 0,$$

avec les notations abrégées

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} \varphi(x, y) \quad , \quad f_k(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} \varphi(x, y),$$

d'où, en y faisant $y = x$,

$$(2) \qquad \sum_0^p{}_i \sum_0^i{}_s C_i^s \left\{ f_s(x, x) \cdot \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}} (\varphi_{p-i}(x, x)) - \right.$$
$$\left. - \varphi_s(x, x) \cdot \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}} (f_{p-i}(x, x)) \right\} = 0.$$

Imaginons que les fonctions

$$f(x, x), f_1(x, x), \dots f_{a-1}(x, x)$$
$$\varphi(x, x), \varphi_1(x, x), \dots \varphi_{b-1}(x, x)$$

soient identiquement nulles, tandis que

$$f_a(x, x) \quad , \quad \varphi_b(x, x)$$

ne sont pas identiquement nuls. Alors la 1ère équation (2), qui ne soit pas vérifiée identiquement, correspond à $p = a + b + 1$ et s'écrit:

$$(a+1)\, f_a(x, x) \frac{d}{dx} \varphi_b(x, x) - (b+1)\, \varphi_b(x, x) \frac{d}{dx} f_a(x, x) = 0,$$

d'où

$$\frac{[\varphi_b(x, x)]^{a+1}}{[f_a(x, x)]^{b+1}} = \text{constante}.$$

On en conclut immédiatement le théorème suivant:

Théorème. *Si les 2 fonctions permutables f et φ admettent respectivement en facteur exactement $(y-x)^a$ et $(y-x)^b$; et si l'on pose*

$$f(x, y) = (y-x)^a\, g(x, y)$$
$$\varphi(x, y) = (y-x)^b\, h(x, y),$$

on a

$$\frac{[h(x, x)]^{a+1}}{[g(x, x)]^{b+1}} = \text{constante}.$$

Ce théorème, dont la démonstration ne nécessite pas l'analyticité de f et φ, mais seulement l'existence d'un nombre suffisant de dérivées, généralise le théorème de M.^r Volterra, d'après lequel, si $f(x, y)$ est du premier ordre, on a

$$\frac{\varphi(x, x)}{f(x, x)} = \text{constante}.$$

Il jouera un rôle dans cette note par le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *$f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ étant deux fonctions permutables analytiques telles que la première admette exactement, la seconde au moins, $(y - x)^\alpha$ en facteur, on peut toujours trouver une constante μ, et une seule, telle que*

$$\varphi(x, y) - \mu f(x, y)$$

admette au moins $(y - x)^{\alpha+1}$ en facteur.

§ 3. — Les séries « composées » d'une série donnée.

Considérons un développement, convergent ou non, peu importe dans ce §, procédant selon les puissances positives de x et y:

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q \, a_{pq} \, x^p y^q .$$

Nous le désignerons par la notation abrégée $f(x, y)$; si on le compose avec lui-même $1, 2, \ldots n - 1$ fois, on obtient des développements analogues

$$\overset{*}{f}{}^2(x, y), \overset{*}{f}{}^3(x, y), \ldots \overset{*}{f}{}^n(x, y)$$

parfaitement définis. Si enfin

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

sont des nombres arbitraires, l'expression

$$(2) \qquad a_1 f(x, y) + a_2 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \cdots + a_n \overset{*}{f}{}^n(x, y) + \cdots$$

peut être mise sous la forme d'une série analogue à (1),

$$(3) \qquad \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q \, c_{p,q} \, x^p y^q$$

parfaitement déterminée. Chaque coefficient c_{pq} est un certain polynome des lettres a_{pq} et a_n.

Donnons nous inversement un développement de forme (3): il pourra arriver qu'il se laisse mettre sous la forme (2). Si oui, il est bien facile de se rendre compte que les $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont déterminés d'une façon unique et fort simplement.

DÉFINITION. *Nous dirons de toute série* (2) *qui se laisse mettre sous la forme* (2), *qu'elle est composée de* f.

§ 4. RETOUR AU PROBLÈME POSÉ AU § 1.

Soit donc une fonction $f(x, y)$ analytique régulière autour de l'origine et soit à déterminer toutes les fonctions analytiques régulières autour de l'origine et permutables avec $f(x, y)$.

I. *Toute série des puissances de* x *et de* y *convergente autour de l'origine et* COMPOSÉE *de* $f(x, y)$, *représente une fonction* $\varphi(x, y)$ *qui répond à la question* [1].

Soit, en effet,

$$\varphi(x, y) = a_1 f + a_2 \dot{f}^2 + \cdots + a_n \dot{f}^n + \cdots$$

en écrivant que

$$\dot{f}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\dot{f}$$

on obtient certaines relations [2] entre les $a_1, a_2, \ldots a_n$, relations dont chacune ne contient qu'un nombre *fini* des $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ Comme ces relations sont identiquement vérifiées quand les $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ non nuls sont en nombre fini, elles sont toujours identiquement vérifiées.

Admettons, maintenant, que

$$f(x, x)$$

ne soit pas pas identiquement nul [3].

II. Réciproque: *Toute série des puissances de* x *et* y *représentant une fonction* $\varphi(x, y)$ *analytique autour de l'origine et permutable avec* f *est* COMPOSÉE *de* f.

Appliquons en effet le corollaire du § 2. Les fonctions

$$f(x, y), \dot{f}^2(x, y), \ldots \dot{f}^n(x, y), \ldots$$

admettent respectivement, exactement,

$$(y - x)^0, (y - x)^1, \ldots (y - x)^{n-1}, \ldots$$

[1] Si la série $\varphi = a_1 f + a_2 \dot{f}^2 + \cdots$ était absolument et uniformément convergente ce résultat serait évident. Mais, ici comme dans la suite, nous ne faisons aucune hypothèse de ce genre: nous supposons seulement que $\varphi(x, y)$ est analytique.

[2] En égalant les coefficients de $x^p y^q$ dans les deux membres.

[3] Cela n'empêche pas que $f(o, o)$ puisse être nul, la fonction $f(x, y)$ n'étant par conséquent d'aucun ordre autour de l'origine (ex. $ax + by$).

en facteur. Il est donc possible de trouver de nombres $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ tels que la différence

$$\varphi(x, y) - a_1 f(x, y)$$

admette au moins $(y - x)$ en facteur, et la différence

$$\varphi(x, y) - a_1 f(x, y) - a_2 \dot{f}^2(x, y) - \cdots - a_n \dot{f}^n(x, y)$$

admette au moins $(y - x)^n$ en facteur, etc. C'est dire que la série en x et y qui représente cette différence, n'a pas de termes de degré inférieur à n. Il en est donc de même de la différence

$$\varphi(x, y) - \sum_1^\infty{}_p\, a_p \dot{f}^p(x, y);$$

cette dernière différence est donc identiquement nulle: ce qui démontre la proposition.

Le problème posé au § 1 est ainsi résolu: on obtiendra toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ par des développements

$$\varphi(x, y) = \sum_1^\infty{}_p\, a_p \dot{f}^p(x, y) \tag{4}$$

les a_p étant des constantes arbitraires telles seulement que la série

$$\sum_1^\infty{}_p \sum_1^\infty{}_q\, c_{pq}\, x^p y^q$$

obtenue en ordonnant le second membre de (4), soit convergente autour de l'origine; c'est un fait que l'on sait exprimer, au moins théoriquement.

Je me suis restreint, ici, au cas où $f(x, x)$ n'est pas identiquement nul. Les autres cas sont plus compliqués et je les étudierai dans une autre Note. J'indique seulement, ici, que le cas où la fonction $f(x, y)$ est d'ordre n autour de l'origine, se ramène immédiatement au précédent: c'est le cas où

$$f(x, y) = (y - x)^{n-1} \{ a_0 + \sum a_{pq}\, x^p y^q \}, \quad a_0 \neq 0. \tag{5}$$

L'équation

$$\dot{\psi}^n(x, y) = f(x, y)$$

admet alors une solution analytique $\psi(x, y)$ telle que

$$\psi(x, x) \neq 0,$$

et les fonctions permutables avec f sont les mêmes que les fonctions permutables avec ψ que nous savons former.

Le cas où a_0 est nul et où, dans le développement (5), les premiers a_{pq} non nuls correspondent à $p+q=m$, m étant premier avec n, est aussi très simple: on démontre encore aisément la réciproque II.

§ 5. — APPLICATIONS.

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant des fonctions analytiques autour de l'origine, et $\chi(x, y)$ une fonction inconnue, les équations

$$\dot{\psi}\,\dot{\chi} = \dot{\varphi}$$

et

$$\dot{\chi}^n = \dot{\varphi}$$

n'ont encore eté étudiées que lorsque φ et ψ sont d'ordres déterminés. Admettons que φ et ψ soient permutables avec une fonction $f(x, y)$ telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul. On obtiendra alors aisément, par application des résultats précédents, la solution χ sous la forme

$$\delta_1 f(x, y) + \delta_2 \dot{f}^2(x, y) + \cdots + \delta_n \dot{f}^n(x, y) + \cdots ;$$

c'est-à-dire, en ordonnant,

$$\sum_1^\infty{}_p \sum_1^\infty{}_q d_{p,q}\, x^p y^q ;$$

mais on ne sait pas *a priori* si cette dernière série converge autour de l'origine (sauf dans les cas déjà étudiés où φ et ψ sont d'ordres déterminés). On peut montrer qu'elle converge; mais cette dernière démonstration me ferait tout à fait sortir du cadre de cette Note, et je me réserve de revenir sur elle.

Matematica. — *Un nuovo aspetto dato al teorema di Goldbach.* Nota di M. VECCHI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Premesso che parlerò esclusivamente di numeri interi, indico con p_n l'n.esimo numero primo dispari, e chiamo *dello stesso ordine* due numeri primi p_h e p_{h+a}, $(a \geqq 1)$, quando è

$$p_h^2 > p_{h+a} . \tag{1}$$

Ciò posto, mi propongo di dimostrare il teorema:

2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero pari* $2n > 132$ *sia la somma di due numeri primi dello stesso ordine in* $\mathrm{E}\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)$ *modi diversi* [*essendo* $\mathrm{E}(x)$ *il massimo intero non maggiore di* x], *è che esi-*