ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Le cas où a_0 est nul et où, dans le développement (5), les premiers a_{pq} non nuls correspondent à $p+q=m$, m étant premier avec n, est aussi très simple: on démontre encore aisément la réciproque II.

§ 5. — Applications.

$\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ étant des fonctions analytiques autour de l'origine, et $\chi(x,y)$ une fonction inconnue, les équations

$$\dot{\psi}\,\dot{\chi}=\dot{\varphi}$$

et

$$\dot{\chi}^n=\dot{\varphi}$$

n'ont encore eté étudiées que lorsque φ et ψ sont d'ordres déterminés. Admettons que φ et ψ soient permutables avec une fonction $f(x,y)$ telle que $f(x,x)$ ne soit pas identiquement nul. On obtiendra alors aisément, par application des résultats précédents, la solution χ sous la forme

$$\delta_1 f(x,y)+\delta_2 \dot{f}^2(x,y)+\cdots+\delta_n \dot{f}^n(x,y)+\cdots:$$

c'est-à-dire, en ordonnant,

$$\sum_1^\infty{}_p \sum_1^\infty{}_q\, d_{p,q}\, x^p y^q\,;$$

mais on ne sait pas *a priori* si cette dernière série converge autour de l'origine (sauf dans les cas déjà étudiés où φ et ψ sont d'ordres déterminés). On peut montrer qu'elle converge; mais cette dernière démonstration me ferait tout à fait sortir du cadre de cette Note, et je me réserve de revenir sur elle.

Matematica. — *Un nuovo aspetto dato al teorema di Goldbach.* Nota di M. Vecchi, presentata dal Socio S. Pincherle.

1. Premesso che parlerò esclusivamente di numeri interi, indico con p_n l'n.esimo numero primo dispari, e chiamo *dello stesso ordine* due numeri primi p_h e p_{h+a}, $(a \geqq 1)$, quando è

$$p_h^2 > p_{h+a}\,. \tag{1}$$

Ciò posto, mi propongo di dimostrare il teorema:

2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero pari* $2n>132$ *sia la somma di due numeri primi dello stesso ordine in* $\mathrm{E}\left(\dfrac{\varphi+1}{2}\right)$ *modi diversi* [*essendo* $\mathrm{E}(x)$ *il massimo intero non maggiore di* x], *è che esi-*

siano φ *numeri non maggiori di* $n - p_{m+1} + 1$ *e non rappresentabili da alcuna delle forme*

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1 + 3x\,,\, b_1 + 5x\,, \ldots, l_1 + p_m x \\ a_2 + 3x\,,\, b_2 + 5x\,, \ldots, l_2 + p_m x\,; \end{cases}$$

dove p_{m+1} *è il più piccolo numero primo, per cui sia*

$$(3) \qquad p_{m+1}^2 + p_{m+1} > 2n\,,$$

e il termine noto di ciascuna delle forme (2) *è resto rispetto al numero primo dispari che è coefficiente di* x.

3. Per lo scopo diretto della dimostrazione, stabilisco una *formula che rappresenta tutti e soli i numeri primi* a partire da 3. Essa è data dal seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il numero $\mathrm{N} > 2$ *sia primo e che esso possa porsi sotto la forma*

$$(4) \qquad 2^x \pi'_m - \pi_m\,,$$

dove π_m *è il prodotto dei numeri primi dispari da* 1 *a* p_m *inclusivamente;* p_m *è il più grande numero primo dispari per cui sia:* $p_m \leq \mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{N}})$; π'_m *è prodotto di potenze di numeri primi* $> p_m$ *con esponenti* $\geqq 0$, *è* $x \geqq 1$, *ed inoltre*

$$(5) \qquad 2^x \pi'_m - \pi_m < p_{m+1}^2\,.$$

La condizione è sufficiente: invero, nella differenza (4) non può entrare un fattore di π_m, nè uno di π'_m, perchè ciascuno di essi, entrando pure in uno dei termini, dovrebbe entrare nell'altro, contro l'ipotesi. Nè può entrare in essa differenza, insieme con un fattore primo compreso fra p_m e p_m^2 (non divisore di π'_m), un altro fattore primo > 1 perchè questo, per la (5), dovrebbe essere $< p_{m+1}$, ciò che si è escluso. Onde la differenza (4) è un numero primo (dispari) maggiore di p_m, e però > 2.

La condizione è necessaria: invero, se N è primo > 2, la somma $\mathrm{N} + \pi_m$ sarà composta del fattore 2 con esponente $\geqq 1$ e (eventualmente) di fattori primi che dovranno essere $> p_m$, perchè, se uno di essi (per es. $q \leq p_m$) entrasse nella somma, entrerebbe, come in π_m, anche in N, che non sarebbe più primo. E deve verificarsi la (5), perchè, se fosse $\mathrm{N} \geq p_{m+1}^2$, sarebbe anche $p_{m+1} \leq \mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{N}})$, contro l'ipotesi.

Ad esempio: per il numero 83, è $p_m = 7$, $\pi_m = 3 \cdot 5 \cdot 7$: onde

$$83 = 2^2.47 - 3 \cdot 5 \cdot 7\,;$$

per cui 83 è primo.

Essendo 167 primo, può porsi sotto la forma (4) che dà:

$$167 = 2.661 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11\,.$$

4. È manifesto che la forma caratteristica dei numeri primi, così costruita, è pure unica per ogni numero primo, onde ci è luogo a parlare di un *Algoritmo dei numeri primi*: Dato un numero primo p, si determina p_m tale che $p_m \leq E(\sqrt{p}) < p_{m+1}$, si costruisce π_m, si scompone in fattori primi la somma $\pi_m + p = S$, e si ha la forma caratteristica del numero primo p:

(6) $$p = S - \pi_m .$$

5. In modo analogo al teorema precedente si dimostra il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero* $N > 121$ *sia primo, è che esso possa porsi sotto la forma*

(7) $$\pi_m - 2^y \pi'_m ,$$

dove sono conservate le notazioni precedenti, ed è pure:

$$y \geqq 1 \quad , \quad \pi_m - 2^y \pi'_m < p^2_{m+1} .$$

6. Da questo teorema discende un *secondo algoritmo dei numeri primi*. Dato un numero primo $p > 121$, si determini p_m e quindi π_m; si faccia la differenza $\pi_m - p = D$; si scomponga D in fattori primi: sarà

(8) $$p = \pi_m - D ,$$

la forma caratteristica (7) del numero p. Così si ha, ad esempio,

$$131 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 2^{10} ,$$
$$193 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 2 \cdot 7411 .$$

7. Se si prescinde dagli algoritmi cui hanno dato luogo i due teoremi precedenti, le due forme caratteristiche, in quelli esibite, possono essere estese nel senso di sostituire al p_m, che in quelle figura, uno qualunque dei numeri primi $> p_m$ e $< p$. Ora, dati due numeri primi dello stesso ordine e maggiori di 121, p_h e p_{h+a}, e posto

$$E(\sqrt{p_{h+a}}) = p_m ,$$

per la (1) è

$$p_m < p_h ;$$

onde, se diciamo *fattori essenziali* di un numero primo p_{h+a} i fattori che figurano nel π_m delle sue forme (4) e (7), il numero primo p_h potrà essere rappresentato dalle due forme (pure caratteristiche pei numeri primi):

(8) $$2^{x_1} \pi'_{\mu} - \pi_m \quad , \quad \pi_m - 2^{y_1} \pi'_{\mu'} ,$$

dove π'_{μ} e $\pi'_{\mu'}$ sono prodotti di fattori (eventuali) $> p_m$, e π_m è prodotto dei fattori essenziali di p_{h+a}. Per tal modo le forme (4) e (7) di p_{h+a} e le (8) di p_h hanno comune il π_m.

8 Dato ora un numero pari $2n > 132$, sia p_{m+1} il massimo numero primo, per cui

(3) $$p_{m+1}^2 + p_{m+1} > 2n ;$$

dico che è

(9) $$n > p_{m+1} .$$

Invero, per la (3), è

$$n \geq \frac{p_m^2 + p_m}{2} ;$$

ma per ogni valore di p_{m+1} si ha, per il teorema di Bertrand-Tchebichef,

$$4 p_m > p_{m+1} ,$$

e quindi:

$$n > \frac{p_{m+1}^2 + 8 p_{m+1}}{32} ;$$

ma a partire da $p_{m+1} = 29$, è sempre

$$p_{m+1}^2 > 28 p_{m+1} ,$$

onde segue la (9); la quale, per $p_{m+1} < 29$, si può verificare.

9. Dalla (9) si ha

(10) $$2n - p_{m+1} > p_{m+1} .$$

Allora si ponga

(11) $$2n = 2(\alpha - \beta)$$

e si faccia variare α sotto la condizione

(12) $$\frac{\pi + p_{m+1}}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi + 2n - p_{m+1}}{2} ,$$

dove è: $\pi = 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p_m$. Ai valori estremi di α nell'intervallo definito dalla (12) corrispondono i valori estremi p_{m+1} e $2n - p_{m+1}$ per $2\alpha - \pi$; per $\pi - 2\beta$ corrispondono i valori estremi $2n - p_{m+1}$ e p_{m+1}. Ora, per le (3), (12) risulta

(13) $$p_{m+1} \leq 2\alpha - \pi < p_{m+1}^2 ,$$

onde sarà pure

$$p_{m+1}^2 > \pi - 2\beta \geq p_{m+1} .$$

10. Dalla (11) si ha:

(14) $$2n = 2\alpha - \pi + \pi - 2\beta .$$

Per i teoremi [3] e [5], solo e sempre quando 2α e 2β saranno della forma $2^z \pi'$ (dove $z \geqq 1$, e π' è $= 1$ oppure è il prodotto di numeri primi maggiori di p_m), i due numeri $2\alpha - \pi$ e $\pi - 2\beta$, di somma $2n$, saranno primi (dello stesso ordine); e nell'intervallo ω definito dalla (12)

$$\omega = n - p_{m+1} + 1, \tag{15}$$

e sotto le forme $2\alpha - \pi$ e $\pi - 2\beta$ cadranno necessariamente tutti i numeri (e, quindi, anche primi) di somma $2n$, soddisfacenti alla condizione (13) (e, quindi, dello stesso ordine).

11. Se α_i e β_i sono i valori di α e β varianti da $i = 1$ ad $i = \omega$, per le (11), (12) e (14) la

$$n + \beta_i = \alpha_i \tag{16}$$

offre un algoritmo per trovare tutti i numeri primi dello stesso ordine che dànno per somma $2n$. Invero, se α_k e β_k sono entrambi della forma $2^s \pi'$ (dove $s \gtreqless 0$), i due numeri $2\alpha_k - \pi$ e $\pi - 2\beta_k$ sono primi dello stesso ordine.

12. Se $a_1, b_1, c_1, \dots, l_1$; $a_2, b_2, c_2, \dots, l_2$ sono i valori minimi di i per cui è ordinatamente

$$\alpha_i \equiv 0 \pmod{3, 5, 7, \dots, p_m}$$
$$\beta_i \equiv 0 \pmod{3, 5, 7, \dots, p_m},$$

ogni numero $\leq \omega$, che non sia rappresentabile da alcuna delle forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + 3x, b_1 + 5x, \dots, l_1 + p_m x \\ a_2 + 3x, b_2 + 5x, \dots, l_2 + p_m x, \end{array} \right. \tag{2}$$

sarà un valore k di i per cui $2\alpha_k - \pi$ e $\pi - 2\beta_k$ saranno numeri primi dello stesso ordine. Viceversa, ogni valore k di i per cui è soddisfatta questa ultima condizione, essendo le formule (4) e (7) caratteristiche, soddisfa alla condizione posta nell'ipotesi.

13. Ora α_h e $\beta_{\omega-h+1}$ sono contemporaneamente divisibili o no per i numeri $3, 5 \dots p_m$, perchè è

$$\alpha_h + \beta_{\omega-h+1} = \pi ;$$

segue che nell'algoritmo [11] i numeri primi si presentano due volte, e ogni coppia di numeri uguali si presenta simmetricamente rispetto al termine $\alpha_{\frac{\omega+1}{2}}$ se n è dispari, e rispetto ai due termini $\alpha_{\frac{\omega}{2}}$ e $\alpha_{\frac{\omega}{2}+1}$ se n è pari. Nel caso di n primo, i due numeri $2\alpha_{\frac{\omega+1}{2}} - \pi$ e $\pi - 2\beta_{\frac{\omega+1}{2}}$ sono primi, ed uguali entrambi ad n. Perciò, se φ è il numero dei numeri $\leq \omega$ non rappresentabili da alcuna delle forme (2), il numero dei modi diversi di scomposizione di $2n$ in numeri primi dello stesso ordine sarà $\frac{\varphi}{2}$ per n composto, e sarà $\mathrm{E}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1$ per n primo; onde esso sarà, in generale, $\mathrm{E}\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)$.

Le considerazioni svolte [10], [12] e [13], giustificano l'affermazione inversa. Così il teorema [2] è stabilito.

14. Variando $2n$, il p_{m+1} resta utile per l'algoritmo [11] dal valore

$$2n = p_m^2 + p_m$$

al valore

$$2n = p_{m+1}^2 + p_{m+1} - 2\,;$$

onde, per un dato p_{m+1}, il minimo valore di ω sarà

$$\omega_1 = \frac{p_m^2 + p_m}{2} - p_{m+1} + 1\,. \tag{16}$$

15. Tenuto conto della (16), che elimina n, il teorema [2] per il caso di $\varphi = 1$ dà:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero pari $2n > 132$ *sia la somma di due numeri primi dello stesso ordine, è che esista almeno un numero minore di*

$$\frac{p_m^2 + p_m}{2} - p_{m+1} + 2$$

non rappresentabile da alcuna delle forme [2].

Il qual teorema sembra additare una via alla dimostrazione del teorema di Goldbach.

Matematica. — *Teoria del Colpo d'ariete* (¹). Nota dell'ingegnere L. Allievi, presentata dal Corrispondente V. Reina.

IV. — Contraccolpi di ritorno a regime.

Se dopo una manovra di chiusura o di apertura che ha messo la tubazione in regime perturbato, l'intercettatore venga arrestato, è senz'altro evidente che il fenomeno idrodinamico successivo all'arresto deve svolgersi assintoticamente alle nuove condizioni di regime permanente, relative al grado di apertura raggiunto.

Indicando con $\eta_* \zeta_*$ i valori di η e ζ relativi a un istante t_* della 1ª fase dopo l'arresto, è ovvio che la serie concatenata $\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3 \ldots$ ecc., rela-

(¹) La Nota I, *Esposisione generale del metodo*, fu pubblicata nel volume IX, serie 5ª, delle Memorie dell'Accademia.

Le Note successive, di carattere prevalentemente tecnico, appaiono negli Atti della Associazione Elettrotecnica italiana, e del Collegio degli ingegneri di Milano.

Si dà qui il riassunto della Nota IV, mentre il riassunto delle Note II e III fu pubblicato nel volume XXII, serie 5ª, 1º sem., fasc. 8º, dei Rendiconti dell'Accademia.