ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulle varietà di Jacobi*. Nota di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Socio E. BERTINI [1].

Sulla superficie di Jacobi F, che rappresenta le g_2 di una curva C_2 di genere due, esiste un sistema ∞^1 di curve, imagini delle g_2 individuate dalle coppie di punti di C_2 aventi un punto fisso. Applicando a tali curve tutte le trasformazioni di 1ª specie di F, si ha un sistema ∞^2, Σ, di curve. Orbene, si ha la notevole proprietà che: *ogni curva* K *di genere due, segante in due punti le curve di* Σ [2], *è una curva di* Σ. Questa proprietà può enunciarsi anche così: *sopra una curva di genere due, una serie* ∞^1, γ_2, *di ordine indice e genere due, priva di coppie speciali, appartiene alla classe individuata dalla serie (di ordine 1) dei punti della curva sostegno* [3]. E si noti che, avendosi su una curva di genere due una serie ∞^1 di ordine 2 e genere > 1, nessun integrale di 1ª specie della curva può dare somma costante lungo i gruppi della serie.

In questa Nota io estendo, la proprietà, enunciata precedentemente, alle curve di genere qualunque. Dimostro cioè il seguente

TEOREMA I. *Sopra una curva* C_p, *di genere* p, *abbiasi una serie* ∞^1 *(irriducibile)* γ_p, *di ordine indice e genere* p, *priva di gruppi speciali e tale che nessun integrale di* 1ª *specie di* C_p *dia somma costante lungo i suoi gruppi. Allora nella classe individuata da* γ_p *v'è l'involuzione (di* 1° *ordine) costituita dai punti di* C_p.

Questo teorema (di cui si può dare subito un enunciato analogo al primo dei due surricordati, relativo cioè alle varietà di Jacobi) può riguardarsi come un complemento al § 5 della mia Memoria M. Mediante esso, infatti, data su una curva C_p, di genere $p > 1$, una serie ∞^1, γ, di genere p e tale che nessun integrale di 1ª specie di C_p dia somma costante lungo i suoi gruppi, *si può subito decidere se nella classe individuata da* γ *esista l'involuzione di* 1° *ordine costituita dai punti di* C_p: *occorre e basta, perchè ciò sia, che il difetto di equivalenza di* γ *sia eguale a* p [4].

Il teorema I permette poi di risolvere, in modo assai semplice, una interessante questione che si presenta spontaneamente nello studio degli in-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1913.

[2] Cfr. Enriques-Severi, Acta Math., tom. 32, pag. 309.

[3] Cfr. la mia Memoria: *Sulle serie algebriche* ... (Rend. Pal., 1913), di cui un sunto è apparso recentemente in questi Rendiconti (1° sem, fasc. 11). Designerò questa mia Memoria con M.

[4] In M, parlando di *involuzione*, si intende, come di solito, escludere quella costituita dai punti della curva sostegno, pensati ciascuno un certo numero (≥ 1) di volte.

tegrali abeliani. E cioè: *che cosa si può dire di due curve* C_p, C_p^*, *del genere* p, *le quali posseggano due sistemi di integrali normali di 1ª specie aventi la* ***medesima tabella*** *di periodi?* Nel § 2 io pervengo assai facilmente a stabilire la *identità birazionale delle curve* C_p, C_p^* (¹).

§ 1. — Dimostrazione del teorema I.

1. Sia C_p una curva di genere p, contenente una serie ∞^1, irriducibile, γ_p, di ordine indice e genere p, priva di gruppi speciali, e tale che nessun integrale di 1ª specie di C_p dia somma costante lungo i suoi gruppi.

La $\overline{\gamma}_p$ *non può avere punti fissi*: se essa infatti fosse ottenuta aggiungendo certi i punti fissi a una serie $\overline{\gamma}_{p-i}$, di ordine $p-i$, la serie lineare g_{p+i-2}^{i-1} residua, rispetto alla serie canonica, di un gruppo variabile di $\overline{\gamma}_{p-i}$, descriverebbe una serie ∞^i, di cui passerebbero certo gruppi per quegli i punti fissi: epperò la $\overline{\gamma}_p$, contro il supposto, possiederebbe gruppi speciali.

La $\overline{\gamma}_p$ *avrà il difetto di equivalenza* p (M, n. 3): sarà cioè, secondo le notazioni usate in M, una $\overline{\gamma}_p[ppp]$.

2. Nella varietà jacobiana V_p, imagine delle g_p di C_p, la $\overline{\gamma}_p$ è rappresentata da una curva (irriducibile) $\overline{K}$, che non incontra la varietà (irriducibile) ∞^{p-2}, w_{p-2}, imagine delle g_p speciali.

Applichiamo a $\overline{K}$ tutte le trasformazioni di 1ª specie di V_p: otterremo un sistema ∞^p, Σ_p, di curve K, tale che da ogni punto di V_p ne escono ∞^1. Applicando alle K le trasformazioni di 2ª specie, si ha un sistema S_p, ∞^p, di curve H, mutato in sè dalle trasformazioni di 1ª specie. Non è da escludere che Σ_p ed S_p coincidano (²).

a) *Tra le* K(H) *appoggiate a* w_{p-2} *la generica non giace in* w_{p-2}: perchè $\Sigma_p(S_p)$ è privo di varietà fondamentali (M, n. 8); essa incontrerà quindi w_{p-2} in un certo numero $k(h)$ di punti.

b) *La totalità* ∞^{p-1} *delle* K(H) *appoggiate a* w_{p-2} *è irriducibile.* Infatti un punto di $\overline{K}$ e uno di w_{p-2} individuano *una* trasformazione di 1ª (2ª) specie, quindi *una* curva K(H) appoggiata a w_{p-2}. La detta totalità è quindi bir. identica a una involuzione, di ordine $\geqq 1$, nella varietà delle coppie di punti di K, w_{p-2}; ed è, perciò, irriducibile.

3. Ai sistemi di curve K, H di V_p corrispondono su C_p sistemi di serie γ; indicheremo tali sistemi ancora con Σ_p, S_p. Precisamente: a una K(H) non appoggiata a w_{p-2} corrisponde una serie ∞^1 $\gamma_p[ppp]$; alla *generica* K(H)

(¹) È mio dovere dichiarar di sapere che, fin dallo scorso marzo, il Severi, in una cartolina inviata al Bertini, gli comunicò, tra l'altro, di aver dimostrato l'identità birazionale di due curve come le C_p, C_p^*, nel caso (generale) in cui queste due curve siano prive di corrispondenze singolari.

(²) Ciò avviene se $\overline{K}$ è mutata in sè da una trasformazione di 2ª specie (e solo allora).

appoggiata a w_{p-2} corrisponde una serie $\infty^1\, \gamma_p[p-k\,pp]$ $(\gamma_p[p-h\,pp])$, contenente $k(h)$ gruppi speciali (una volta; ved. M, nn. 2, 3). Queste ultime serie si diranno *specializzate* (1).

Si hanno ora le seguenti proprietà:

A) Presa una qualunque γ, nessun integrale di 1ª specie di C_p dà somma costante lungo i suoi gruppi: ciò per l'ipotesi fatta su $\overline{\gamma}_p$. Ne segue che *nella classe cui appartengono le γ non può esistere una serie composta con una involuzione (nè, in particolare, una involuzione)* (2).

B) Una γ, *depurata dai suoi punti fissi (se ne ha)*, induce fra C_p e una curva C_p^* bir. identica alle K, H, una corrispondenza algebrica θ; e su C_p^* *una serie γ^* bir. identica a C_p, e di cui l'ordine e l'indice eguagliano rispettivamente l'indice e l'ordine di γ* (M, n. 1); *nessun integrale di 1ª specie di C_p^* dà somma costante lungo i gruppi di γ^** (3).

C) Avremo così su C_p^* due sistemi Σ_p^*, S_p^* di serie γ^*; e, come le corrispondenze θ dipendono due a due fra loro (in un verso, quindi anche nell'altro) secondo i numeri (1 1) o (1 — 1), così *i sistemi Σ_p^*, S_p^* saranno generabili, al pari di Σ_p, S_p, applicando a una γ^* fissata tutte le trasformazioni di 1ª e 2ª specie fra le g_p di C_p^**. Dicendo ciò, intendiamo di aver reso di ordine p le γ^* di ordine $p-k$, $(p-h)$, indotte dalle γ di indice $p-k$, $(p-h)$, aggiungendo a tali γ^* tutte le possibili k-ple (h-ple) di punti fissi.

D) La generica γ di $\Sigma_p(S_p)$, non essendo specializzata, non può avere, per una considerazione fatta al n. 1, punti fissi; essa è una $\gamma_p[ppp]$, e induce su C_p^* una $\gamma_p^*[ppp]$.

Le γ_p con punti fissi sono certo specializzate; esse sono tante quante le γ^* *specializzate* (poichè queste ultime, avendo l'indice $<p$, inducono su C_p serie di ordine $<p$), sono cioè ∞^{p-1}; tenendo presente la proprietà $b)$ del n. 2, si vede che *la totalità delle γ_p di $\Sigma_p(S_p)$ specializzate coincide colla totalità delle γ_p con punti fissi*. Se la generica γ_p specializzata di $\Sigma_p(S_p)$ ha i (j) punti fissi, prescindendo da questi si ha una $\gamma_{p-i}[p-k\,pp]$ $(\gamma_{p-j}[p-h\,pp])$, che indurrà su C_p^* una $\gamma_{p-k}^*[p-i\,pp]$ $(\gamma_{p-h}^*[p-j\,pp])$. Tali $\gamma_{p-k}^*(\gamma_{p-h}^*)$, rese di ordine p coll'aggiunta di tutte le possibili k-ple (h-ple) di punti fissi, dànno appunto le γ_p^* specializzate.

(1) *Non occorre* la considerazione delle particolari K, H, passanti per punti di w_{p-2} imagini di g_p più volte infinite, ovvero giacenti su w_{p-2} (posto che tali K, H esistano).

(2) Ved. nota 4, a pag. 98. Nella classe cui appartengono le γ non può nemmeno esistere l'involuzione costituita dai punti di C_p pensati ciascuno $\omega(>1)$ volte: perchè in tal caso, com'è facile vedere, l'indice di $\overline{\gamma}_p$ risulterebbe $=\omega^2 p$.

(3) Per un teorema di Comessatti (Rend. Pal., 1913), ritrovato, sotto altra forma, in M (§ 6).

E) Vediamo ormai che *le due curve* C_p, C_p^* *si trovano in condizioni identiche*: potranno perciò nei nostri ragionamenti scambiarsi fra loro (scambiando anche fra loro i e k, j e h).

4. Per dimostrare il teorema I, distinguiamo ora due casi.

I) *Entrambe le curve* C_p, C_p^* *siano iperellittiche.*

Si consideri allora su C_p la generica γ_p specializzata di Σ_p; essa contiene un numero finito $(=k)$ di gruppi speciali; quindi la $\gamma_{p-i}[p-k\,p\,p]$, che si ha prescindendo dai suoi i punti fissi, ha un numero *finito* $(\geqq 0)$ di coppie comuni colla g_2^1 di C_p. Ora questo numero, per una notissima formula di Schubert, è dato dall'espressione

$$p-(i+1)(p-k),$$

che non può pertanto risultare negativa. Deve cioè essere

$$k \geqq \frac{i}{i+1}\,p.$$

Ragionando analogamente su C^*, si arriva alla disuguaglianza

$$i \geqq \frac{k}{k+1}\,p,$$

che combinata colla precedente, dà

$$p^2 \leqq (i+1)\,(k+1):$$

donde segue $i=k=p-1$; il che dimostra, nel caso attuale, il teorema.

5. II) *Una almeno delle due curve* C_p, C_p^*, *ad es. la* C_p^*, *non sia iperellittica.* Cominciamo allora a mostrare che *la generica* γ_p^* *specializzata di uno dei sistemi* Σ_p^*, S_p^* *ha un solo punto fisso*; e per questo faremo vedere che se la generica γ_p^* specializzata di uno dei detti sistemi, ad es. Σ_p^*, ne ha $h>1$, allora la generica specializzata di S_p^* ne ha *uno*.

Supponiamo dunque $h>1$; prendiamo un *generico* gruppo canonico di C_p^*, e dividiamolo in due gruppi: uno, $\Gamma_{\pi-2}$, di $\pi-2$ punti; l'altro di p. Quest'ultimo appartiene a ∞^1 serie γ_p^* specializzate di Σ_p^*: fissiamone una $\overline{\gamma}_p^*$; siano $A_1 A_2 \ldots A_h$ i suoi punti fissi; E_{p-h} un gruppo *variabile* della $\overline{\gamma}_{p-h}^*$ che si ottiene depurando la $\overline{\gamma}_p^*$ da tali punti fissi.

Il generico fra i gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots+A_h$ ha l'indice di specialità zero (n. 2, b); ne segue che il generico fra i gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots A_{h-2}$ ha l'indice di specialità 2; e se *fissiamo* su C_p^* un punto X, il generico fra i gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots+A_{h-2}+X$ avrà l'indice di specialità 1. (Se $h=2$, mancano $A_1 \ldots A_{h-2}$).

Consideriamo allora i residui E'_{p-1}, rispetto alla serie canonica, dei gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots+A_{h-2}+X$. Dico che, se X è stato scelto genericamente, la serie degli E'_{p-1} non può avere punti fissi. Se infatti, *per ogni posizione di* X, la serie degli E'_{p-1} avesse punti fissi, le serie g_p^1 residue dei gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots+A_{h-2}$ rispetto alla serie canonica avrebbero dei punti fissi, ovvero sarebbero composte. Ma tra le dette g_p^1 vi è quella individuata dalla p-pla $\Gamma_{p-2}+A_{h-1}+A_h$; la quale p-pla, per essere estratta dal generico gruppo canonico di una curva non iperellittica, deve invece individuare una g_p^1 non composta e priva di punti fissi. Dunque non può la serie degli E'_{p-1} avere dei punti fissi. Aggiungendo un punto fisso alla serie degli E'_{p-1} (depurata delle g_{p-1} infinite, residue, rispetto alla serie canonica, di eventuali gruppi $E_{p-h}+A_1+\cdots+A_{h-2}+X$ più volte speciali), si ha una γ_p^* di S_p^* con *un* punto fisso: il che dimostra quanto si è affermato a principio di questo numero.

6. La generica γ_p^* specializzata di uno dei due sistemi Σ_p^*, S_p^* ha dunque, come si è or ora visto, *un* punto fisso: ne segue che la generica γ_p specializzata di uno dei due sistemi Σ_p, S_p, sia p. es. Σ_p, ha l'indice $p-1$ (contiene un solo gruppo speciale). Prescindendo dai suoi i punti fissi, essa darà una $\gamma_{p-i}[p-1\ pp]$.

È intanto da escludere che C_p sia iperellittica: altrimenti, applicando alla detta $\gamma_{p-i}[p-1\ pp]$ il ragionamento fatto al n. 4, si avrebbe la diseguaglianza

$$1 \geq \frac{i}{i+1}\,p\,;$$

assurda, per essere $0<i<p$, $p>2$.

Ciò posto, sia E_{p-i} un gruppo variabile della γ_{p-i}; Γ_{i-1} l'insieme di $i-1$ fra i punti fissi poc'anzi nominati (se $i=1$, Γ_{i-1} manca); il generico tra i gruppi $E_{p-i}+\Gamma_{i-1}$ ha l'indice di specialità 1 (e una volta, al più, il gruppo $E_{p-i}+\Gamma_{i-1}$ potrà acquistare l'indice di specialità *due*). Consideriamo allora la serie dei residui E'_{p-1}, rispetto alla serie canonica, dei gruppi $E_{p-1}+\Gamma_{i-1}$.

Che indice avrà la serie degli E'_{p-1}? Il gruppo Γ_{i-1}, insieme con un generico punto di C_p, subordina nella serie canonica una g_{2p-2-i}^{p-i-1}: il numero dei gruppi di γ_{p-i} contenuti in gruppi di tal g_{2p-2-i}^{p-i-1} dà l'indice richiesto. Orbene, calcolando tal numero colla formula di Schubert, si trova che esso vale *uno*. Ne segue (n. 3, A) che la serie degli E'_{p-1} ha $p-2$ punti fissi: il che dimostra il teorema I.

§ 2. — Applicazione del teorema I alla teoria degli integrali abeliani.

7. Passiamo adesso all'applicazione, enunciata in prefazione, del teor. I.

Siano C_p, C_π^* due curve dei generi p, π, aventi i sistemi di integrali normali di 1ª specie $v_1\,v_2 \ldots v_p$; $u_1\,u_2 \ldots u_\pi$. Siano

$$\left|\begin{array}{cccc} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp} \end{array}\right| , \qquad \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\pi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\pi 1} & a_{\pi 2} & \ldots & a_{\pi\pi} \end{array}\right|$$

le rispettive tabelle dei secondi periodi.

Indichiamo con j, k indici variabili da 1 a p; con i, l indici variabili da 1 a π. E supponiamo che esistano dei numeri complessi non tutti nulli π_{kl}, e degli intieri h_{kl}, g_{jl}, H_{kl}, G_{jl}, soddisfacenti alle relazioni

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_j g_{jl}\,\tau_{kj} \\ \sum_i \pi_{ki}\,a_{il} &= H_{kl} + \sum_j G_{jl}\,\tau_{kj} \end{aligned} \right. ,$$

Allora, com'è ben noto ([1]), le equazioni

$$v_k(y_1) + v_k(y_2) + \cdots + v_k(y_p) = \sum_i \pi_{ki}\,u_i(x) + \pi_k\,,$$

dove x indica un punto variabile di C_π^*; $y_1\,y_2 \ldots y_p$ punti di C_p, e le π_k sono costanti genericamente scelte, definiscono su C_p una serie ∞^1, di ordine p, bir. identica a C_π^* (o risp. a una involuzione di C_π^*), priva di gruppi speciali e punti fissi, avente l'indice eguale a

$$\sum_{kl} (h_{kl}\,G_{kl} - g_{kl}\,H_{kl}).$$

(o risp. a un divisore di questo numero).

8. Sia ora $p = \pi$, $\tau_{ik} = a_{ik}$. Si potranno soddisfare le (1), ponendo

$$\pi_{kl} = 0 \quad \text{se} \quad k \neq l\,, \quad \pi_{kk} = 1\,;$$

$$h_{kl} = G_{kl} = 0 \quad \text{se} \quad k \neq l\,, \quad h_{kk} = G_{kk} = 1\,;$$

$$g_{kl} = H_{kl} = 0\,.$$

Allora le equazioni

$$v_k(y_1) + \cdots + v_k(y_p) = u_k(x) + \pi_k\,,$$

colle π_k genericamente scelte, rappresenteranno una serie ∞^1 d'ordine p, bir. identica a C_p^* e priva di gruppi speciali, il cui indice risulta eguale a p. Poichè nessun integrale di 1ª specie di C_p dà somma costante lungo i gruppi di tal serie, si potrà applicare il teorema I; e ne risulta l'identità birazionale delle curve C_p, C_p^*: c. d. d.

[1] Veramente l'Hurwitz, nella Sua celebre Memoria del vol. 28 dei Math. Ann., si riferisce sempre a due curve *sovrapposte*; ma molte delle Sue considerazioni si estendono immediatamente al caso di due curve *distinte*.