ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica — *Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni.* Nota del Corrisp. O. TEDONE.

1. In due Note precedenti [1], sull'equazione delle onde smorzate, ho messo in luce due relazioni integrali fra le funzioni di Bessel, che mi sono parse notevoli. La maniera però con la quale queste relazioni, in quelle Note, sono state dimostrate, non è quella con la quale ad esse sono pervenuto. Della loro esistenza ero da lungo tempo convinto, basandomi, principalmente, sulla risolubilità, alla quale fermamente credevo, del problema che poi, effettivamente, ho risoluto nella prima delle due Note citate. E solo in seguito a molti tentativi sono riuscito a costruire un procedimento che è capace di fornire molte relazioni analoghe a quelle di cui parliamo e che spesso sono adatte alla risoluzione di determinate equazioni integrali del tipo di Volterra. La descrizione di questo procedimento, in un caso speciale, e l'indicazione delle equazioni integrali che di conseguenza si riesce a risolvere, saran l'oggetto della presente Nota.

2. Ricordiamo che l'equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

si integra completamente col metodo delle caratteristiche di Riemann [2], e che la soluzione fondamentale della (1) relativa al punto (x_0, y_0) (vogliam dire la soluzione della (1) regolare in un intorno di (x_0, y_0) e che acquista il valore uno sulle due caratteristiche uscenti dal punto stesso) è

$$(2) \quad I_0(z) = J_0(z\sqrt{-1}) = \sum_0^\infty {}_i \frac{z^{2i}}{2^{2i}(i!)^2} \quad , \quad z = \sqrt{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2} \, .$$

Si tratti ora di costruire il più generale integrale della (1) nel campo τ formato dal quadrante positivo il cui contorno sia costituito, quindi, dalle parti positive degli assi coordinati. Se su questo contorno fossero noti i valori di u e della sua derivata normale, la formola che discende dal metodo di Riemann e che, per brevità, chiameremo, senz'altro, formola di Riemann, è capace di risolvere la quistione in modo completo, di determinare cioè, in ogni punto $O \equiv (x_0, y_0)$ del campo, il corrispondente valore

[1] Vedi questi Rendiconti, sedute 31 maggio 1913 e 4 gennaio 1914.

[2] Vedi, p. es., Picard, Comptes rendus, vol. 117, 1893.

u_0 di u. Poniamo, per i valori che u e $\frac{\partial u}{\partial y}$ assumono sull'asse x positivo;

$$(3) \qquad u = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{F}(x);$$

e, per i valori che u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ assumono sull'asse y positivo;

$$(3') \qquad u = \varphi(y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi(y),$$

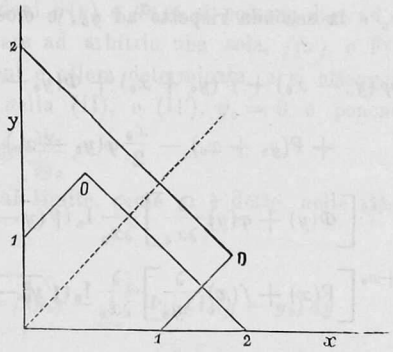
queste quattro funzioni essendo, per ragioni di continuità, soggette alle condizioni:

$$(3'') \qquad f(o) = \varphi(o) \quad , \quad f'(o) = \Phi(o) \quad , \quad \varphi'(o) = \mathrm{F}(o).$$

Conduciamo, quindi, per il punto (x_0, y_0) le due caratteristiche

$$(4) \qquad y - x = y_0 - x_0 \quad , \quad y + x = y_0 + x_0$$

dell'equazione (1), ed osserviamo che la prima di queste caratteristiche in-



contra il contorno del campo τ in un solo punto che chiameremo 1 e che potrà cadere sull'asse x o sull'asse y; mentre la seconda incontra il contorno di τ sempre in due punti di cui uno cade sull'asse x e l'altro sull'asse y, e di cui uno solo (del resto, qualunque), e che chiameremo 2 sarà estremo dell'arco a cui è esteso l'integrale che comparisce nella formola di Riemann. Abbiamo quindi due modi diversi per risolvere la nostra quistione. La porzione di contorno di τ a cui è esteso l'integrale che comparisce nella formola di Riemann, sarà sempre limitata dai due punti 1 e 2. Però, nel primo modo il punto 1 cade sull'asse y o sull'asse x, mentre il punto 2 cade costantemente sull'asse x; nel secondo modo, invece, il punto 1 può cadere sull'asse x o sull'asse y, mentre il punto 2 cade costantemente sull'asse y. In corrispondenza di questi due modi, evidentemente diversi, di

poter determinare il valore di u in uno stesso punto O del campo, abbiamo due formole che noi scriveremo, pel primo caso, nell'ipotesi $y_0 > x_0$, e, pel secondo caso, nell'ipotesi $y_0 < x_0$.

$$\text{(I)}\quad 2u_0 = \varphi(y_0 - x_0) + f(y_0 + x_0)$$
$$- \int_0^{y_0 - x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \mathrm{I}_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$+ \int_0^{y_0 + x_0} \left[\mathrm{F}(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \mathrm{I}_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx\,,$$

$$\text{(II)}\quad 2u_0 = f(x_0 - y_0) + \varphi(x_0 + y_0)$$
$$+ \int_0^{x_0 + y_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \mathrm{I}_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$- \int_0^{x_0 - y_0} \left[\mathrm{F}(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \mathrm{I}_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx\,.$$

A queste formole conviene aggiungere quelle che si ottengono derivando la (I) rispetto ad x_0 e la seconda rispetto ad y_0, e cioè:

$$\text{(I')}\quad 2 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} = - \varphi'(y_0 - x_0) + f'(y_0 + x_0) + \Phi(y_0 - x_0)$$
$$+ \mathrm{F}(y_0 + x_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(y_0 - x_0) + \frac{y_0}{2} f(y_0 + x_0)$$
$$- \int_0^{y_0 - x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial x_0} \mathrm{I}_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$+ \int_0^{y_0 + x_0} \left[\mathrm{F}(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial x_0} \mathrm{I}_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx\,,$$

$$\text{(II')}\quad 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = - f'(x_0 - y_0) + \varphi'(x_0 + y_0) + \Phi(x_0 + y_0)$$
$$+ \mathrm{F}(x_0 - y_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(x_0 + y_0) + \frac{y_0}{2} f(x_0 - y_0)$$
$$+ \int_0^{x_0 + y_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial y_0} \mathrm{I}_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$- \int_0^{x_0 - y_0} \left[\mathrm{F}(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial y_0} \mathrm{I}_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx\,.$$

Col modo (I) di risolvere la quistione, $f(x)$ ed $\mathrm{F}(x)$ si possono dare ad arbitrio. Sempre, quando il punto O si avvicina ad un punto dell'asse x positivo, di ascissa x_0, u_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$ tendono ai valori $f(x_0)$ ed $\mathrm{F}(x_0)$ rispet-

tivamente. Se vogliamo, invece, che, anche quando O tende ad un punto dell'asse y positivo e di ordinata y_0, u_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$ tendano a $\varphi(y_0)$ o $\Phi(y_0)$, devono essere soddisfatte certe condizioni, le quali si ricavano subito dalle (I) e (I') facendo tendere x_0 a zero e ponendo $\varphi(y_0)$ e $\Phi(y_0)$ al posto dei limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$.

Noi ammettiamo come dimostrato (giacchè la dimostrazione si fa facilmente) che, data, oltre alle due funzioni $f(x)$ ed $F(x)$, una delle altre funzioni $\varphi(x)$, o $\Phi(y)$, è univocamente determinato u in tutto il campo τ, e quindi, anche l'altra delle due ultime funzioni. Ammettiamo inoltre come dato dall'intuizione, dall'intuizione fisica, p. es., che ad ogni sistema di funzioni $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(y)$, ovvero $f(x)$, $F(x)$, $\Phi(y)$, corrisponde una effettiva soluzione della (I) regolare in tutto il campo τ e tale, che al contorno, essa e la derivata normale acquistano quei valori che sono stati ad esse assegnati. Queste ammissioni a noi sono lecite, perchè noi abbiamo di mira di scoprire certe formole che, in ogni modo, conviene poi verificare.

Col modo (II) di risolvere il problema, le cose vanno semplicemente invertite. Le funzioni $\varphi(y)$ e $\Phi(y)$ si possono dare ad arbitrio; e delle altre due, se ne può dare ad arbitrio una sola, $f(x)$, o $F(x)$. L'altra di queste due ultime funzioni è allora determinata, e si ottengono equazioni atte ad ottenerla facendo nella (II), o (II'), $y_0 = 0$ e ponendo $f(x_0)$, $F(x_0)$ per i limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial y_0}$.

3. Andando al limite, come si è detto, nelle (I), (I'), per $x_0 = 0$, si trova:

$$
(\mathrm{III})\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(y_0) &= f(y_0) - \int_0^{y_0} \Phi(y)\, \mathrm{I}_0(y - y_0)\, dy \\
&\qquad + \int_0^{y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \mathrm{I}\left(\sqrt{y_0^2 - x^2}\right) dx\,, \\
\Phi(y_0) &= F(y_0) + \frac{y_0}{2} f(y_0) - \varphi'(y_0) + f'(y_0) \\
&\qquad + \int_0^{y_0} \varphi(y) \frac{\mathrm{I}_1(y - y_0)}{y - y_0}\, dy \\
&\qquad - \int_0^{y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{y_0^2 - x^2}\right) dx\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Queste due equazioni non possono essere distinte rispetto alle due funzioni $\varphi(y)$ e $\Phi(y)$, a causa delle osservazioni fatte, e devono quindi essere l'una conseguenza dell'altra.

Similmente, facendo tendere y_0 a zero nelle (II), (II'), e ponendo $f(x_0)$, $F(x_0)$ per i limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial y_0}$, si trova:

$$
\text{(IV)}\quad \begin{cases}
f(x_0) = \varphi(x_0) - \int_0^{x_0} F(x)\, J_0(x - x_0)\, dx \\
\qquad\qquad + \int_0^{x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy, \\
F(x_0) = \Phi(x_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(x_0) - f'(x_0) + \varphi'(x_0) \\
\qquad\qquad + \int_0^{x_0} f(x) \frac{J_1(x - x_0)}{x - x_0}\, dx \\
\qquad - \int_0^{x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial y} J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy .
\end{cases}
$$

Anche su queste equazioni possono ripetersi osservazioni analoghe alle precedenti. In definitiva, poi, le (IV) non possono essere che le (III) stesse sotto un aspetto diverso.

4. Se, in due qualunque delle (III), (IV), riteniamo che siano diverse da zero soltanto quelle, delle nostre quattro funzioni f, F, φ, Φ, rispetto alle quali esse compaiono risolute, otteniamo una serie di equazioni integrali del tipo di Volterra, con le corrispondenti formole di risoluzione. Trascurando di riportare quelle equazioni integrali che si possono ottenere da quelle già scritte col semplice scambio delle funzioni I nelle corrispondenti funzioni J, avremo:

$$
a)\quad \begin{cases}
\varphi(y_0) = - \int_0^{y_0} \Phi(y)\, I_0(y - y_0)\, dy , \\
\Phi(y_0) = - \varphi'(y_0) + \int_0^{y_0} \varphi(y) \frac{I_0(y - y_0)}{y - y_0}\, dy ;
\end{cases}
$$

$$
b)\quad \begin{cases}
\varphi(y_0) = f(y_0) + \int_0^{y_0} f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx \\
\qquad\qquad = \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^{y_0} f(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx , \\
f(x_0) = \varphi(x_0) + \int_0^{x_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\
\qquad\qquad = \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{x_0} \varphi(y)\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy;
\end{cases}
$$

$$c)\quad \begin{cases} \varphi(y_0) = \displaystyle\int_0^{y_0} F(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,, \\[2ex] F(x_0) = \dfrac{x_0}{2}\,\varphi(x_0) + \varphi'(x_0) + \displaystyle\int_0^{x_0} \varphi(y)\, \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x_0}\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\[2ex] \qquad\qquad = \dfrac{\partial}{\partial x_0} \displaystyle\int_0^{x_0} \varphi'(y)\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy\,; \end{cases}$$

$$d)\quad \begin{cases} \Phi(y_0) = F(y_0) - \displaystyle\int_0^{y_0} F(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx \\[2ex] \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^{y_0} F'(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,, \\[2ex] F(x_0) = \Phi(x_0) - \displaystyle\int_0^{x_0} \Phi(y)\, \frac{\partial}{\partial y}\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\[2ex] \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^{x_0} \Phi'(y_0)\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy\,. \end{cases}$$

Possiamo subito osservare che le formole *c*) e *d*) si deducono immediatamente dalle *b*); sicchè, di equazioni fondamentalmente distinte, che così scorgiamo come risolubili, ve ne sono due tipi soltanto. Le funzioni date, e le funzioni incognite, soddisfano, per il valore zero dell'argomento, a condizioni che facilmente si scorgono e per cui noi non insistiamo su di esse. In questa Nota, infine, non ci occuperemo di ulteriori verifiche.

5. Dalle relazioni (III) e (IV), oltre ai precedenti risultati, si può ottenere un non piccolo numero di relazioni integrali fra le funzioni di Bessel, che possono riuscire utili in date quistioni. Se nelle (III), ad es., facciamo $f = \Phi = 0$, abbiamo:

$$\varphi(y_0) = \int_0^{y_0} F(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,,$$

$$0 = F(y_0) - \varphi'(y_0) + \int_0^{y_0} \varphi(y)\, \frac{I_1(y - y_0)}{y - y_0}\, dy - \int_0^{y_0} F(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,.$$

Eliminando, quindi, la funzione φ fra queste due equazioni, troviamo:

$$\int_0^{y_0} F(x)\, dx \left\{ \int_x^{y_0} \frac{I_1(y - y_0)}{y - y_0}\, I_0(\sqrt{y^2 - x^2})\, dy - \left(\frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\partial}{\partial x}\right) I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2}) \right\} = 0\,.$$

Ed essendo, in questa equazione, $F(x)$ una funzione arbitraria, siamo condotti

alla relazione fra le funzioni di Bessel che abbiamo verificata nella seconda delle Note in principio citate.

6. Dalle equazioni integrali indicate nel n. 4, altre numerose se ne possono ricavare egualmente risolubili, come le prime, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. Una di queste nuove equazioni è stata risoluta nella prima delle due Note citate. E sull'argomento dovrò ritornare in una prossima occasione per completare lo studio del problema iniziato in quella Nota. Qui vogliamo aggiungere ancora le osservazioni seguenti: È chiaro che molte sono le equazioni integrali di Volterra, risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. È anche più che probabile che non tutte queste equazioni sieno suscettibili di una tale soluzione. Si potrà stabilire un criterio per distinguere un caso dall'altro? Mi parrebbe molto interessante una risposta, in un senso qualunque, a questa domanda. Il concetto di solubilità di un'equazione integrale (e forse sarà utile di considerare insieme il caso più generale di un'equazione integro-differenziale) di Volterra, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni, oltre, si intende, ad operazioni algebriche, costituirebbe, per queste equazioni, l'analogo del concetto di risolubilità per radicali delle equazioni algebriche e della risolubilità, per quadrature, delle equazioni differenziali ordinarie.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della deformabilità delle V_n di S_{n+1} fu esaminato per una V_3 di S_4 dallo Schur [1] e risoluto nello stesso caso dal Bianchi [2]: nell'indirizzo del Bianchi, ma con metodo diverso, lo Sbrana [3] ha trattato e risoluto il problema nel caso generale. Questi ha trovato che condizione necessaria per la deformabilità è che la V_n sia luogo di $\infty^2 S_{n-2}$ ed abbia lungo ciascuno uno S_n tangente fisso: sicchè, servendosi dell'immagine ipersferica di Gauss della V_n si è condotti a studiare un'equazione di Laplace. E la condizione necessaria e sufficiente per la deformabilità è appunto assegnata in rapporto ad un suo gruppo di soluzioni.

[1] F. Schur, *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume*, Math. Ann. Bd. XXVIII, pp. 343-353, § II.

[2] L. Bianchi, *Sulle varietà a 3 dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, Mem. della Società ital. delle Scienze (detta dei XL), ser. III, tom. XIII (1905), pp. 261-323.

[3] U. Sbrana. *a*) *Sulla varietà ad $n-1$ dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXVII (1909), pp. 1-45; *b*) *Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie*, Ann. di Matem. (3), vol. 15 (1908), pp. 329-348.