ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

alla relazione fra le funzioni di Bessel che abbiamo verificata nella seconda delle Note in principio citate.

6. Dalle equazioni integrali indicate nel n. 4, altre numerose se ne possono ricavare egualmente risolubili, come le prime, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. Una di queste nuove equazioni è stata risoluta nella prima delle due Note citate. E sull'argomento dovrò ritornare in una prossima occasione per completare lo studio del problema iniziato in quella Nota. Qui vogliamo aggiungere ancora le osservazioni seguenti: È chiaro che molte sono le equazioni integrali di Volterra, risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. È anche più che probabile che non tutte queste equazioni sieno suscettibili di una tale soluzione. Si potrà stabilire un criterio per distinguere un caso dall'altro? Mi parrebbe molto interessante una risposta, in un senso qualunque, a questa domanda. Il concetto di solubilità di un'equazione integrale (e forse sarà utile di considerare insieme il caso più generale di un'equazione integro-differenziale) di Volterra, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni, oltre, si intende, ad operazioni algebriche, costituirebbe, per queste equazioni, l'analogo del concetto di risolubilità per radicali delle equazioni algebriche e della risolubilità, per quadrature, delle equazioni differenziali ordinarie.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della deformabilità delle V_n di S_{n+1} fu esaminato per una V_3 di S_4 dallo Schur (1) e risoluto nello stesso caso dal Bianchi (2): nell'indirizzo del Bianchi, ma con metodo diverso, lo Sbrana (3) ha trattato e risoluto il problema nel caso generale. Questi ha trovato che condizione necessaria per la deformabilità è che la V_n sia luogo di $\infty^2 S_{n-2}$ ed abbia lungo ciascuno uno S_n tangente fisso: sicchè, servendosi dell'immagine ipersferica di Gauss della V_n si è condotti a studiare un'equazione di Laplace. E la condizione necessaria e sufficiente per la deformabilità è appunto assegnata in rapporto ad un suo gruppo di soluzioni.

(1) F. Schur, *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume*, Math. Ann. Bd. XXVIII, pp. 343-353, § II.

(2) L. Bianchi, *Sulle varietà a 3 dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, Mem. della Società ital. delle Scienze (detta dei XL), ser. III, tom. XIII (1905), pp. 261-323.

(3) U. Sbrana. *a*) *Sulla varietà ad $n-1$ dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXVII (1909), pp. 1-45; *b*) *Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie*, Ann. di Matem. (3), vol. 15 (1908), pp. 329-348.

Per quanto il problema possa dirsi risoluto (salvo, s'intende, l'effettiva integrazione dell'equazione detta) mi pare opportuno dare alla soluzione una forma più geometrica: al che si riesce facilmente giovandosi dei risultati recentemente acquisiti nella geometria proiettivo-differenziale degli iperspazii. E precisamente mostrerò come si giunga, con considerazioni proiettive, alla condizione necessaria e come si associ alla V_n, in modo intrinseco (cioè indipendente dalla rappresentazione di Gauss), un'equazione di Laplace: dalla rigidità degli spazii generatori di V_n dedurrò poi la condizione necessaria e sufficiente. Questa mette in luce un tipo di applicabilità che, indipendentemente dal caso attuale, mi sembra offra interesse per una ricerca di carattere generale.

2. Per non interrompermi nel seguito, ricordo un teorema sulle varietà V_k che con le coordinate proiettive omogenee dei loro punti $x_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ soddisfano ad uno o più gruppi di equazioni simultanee alle derivate parziali, lineari ed omogenee, del tipo:

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_k} + \\ + \alpha_{1k} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + a_{11} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{10} x = 0,$$

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t_2 \partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2^2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2 \partial \tau_k} + \\ + \alpha_{2k} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + \alpha_{21} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{20} x = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k \partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k \partial \tau_2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k^2} + \\ + \alpha_{kk} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + \alpha_{k1} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{k0} x = 0$$

(ove i coefficienti sono funzioni delle τ). Prescindendo da qualunque ipotesi sull'essere le x_i soluzioni di altre equazioni o meno, si dimostra [1] che:

Se una V_k *rappresenta* m $(< k)$ *gruppi distinti di tali equazioni, essa è luogo di* S_m *ed ammette lungo ognuno di essi lo stesso spazio tangente fisso* [2].

[1] E. Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. IL (1913-1914), nn. 9, 13. Se invece di coordinate omogenee si adoperano coordinate non omogenee, le equazioni non debbono contenere i termini in x (cioè $\alpha_{i0} = 0$).

[2] Accenno al ragionamento semplicissimo che conduce al risultato nel caso di un

3. Veniamo ora al nostro problema.

Si abbia dunque una V_n in uno S_{n+1} euclideo: se si sceglie l'origine delle coordinate sulla varietà, e l'iperpiano ivi tangente come quello di equazione $x_{n+1} = 0$, la V_n si rappresenta nell'intorno dell'origine, in coordinate non omogenee, con l'equazione:

$$x_{n+1} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tfrac{1}{2} \Sigma_{ik} c_{ik} x_i x_k + \cdots, \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

ove

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_i \, \partial x_k}\right)_{x_1 = 0, \dots, x_n = 0} = \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_i \, \partial x_k}\right)^0 .$$

Perchè la varietà sia deformabile nell'intorno dell'origine (1) debbono annullarsi tutti i minori del terz'ordine estratti dal determinante delle c (2)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} .$$

---

sol gruppo di equazioni. Si consideri il punto $x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ (le cui coordinate omogenee x_i sono soluzioni delle equazioni scritte) e insieme ad esso il punto

$$A = a_1 \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + \cdots + a_k \frac{\partial x}{\partial \tau_k}$$

(le cui coordinate si ottengono apponendo gli indici alla x). Mentre il punto x varia sulla V_k la retta xA descrive una varietà V' che ha dimensione k o $k+1$ secondo che la xA è tutta contenuta in V_k (e in tal caso $V' \equiv V_k$) oppure no. Per decidere cerchiamo la dimensione dello spazio tangente a V' in un punto qualsiasi della retta xA. Esso, come si riscontra subito, è determinato dai punti

$$x, A, \frac{\partial A}{\partial \tau_1}, \frac{\partial A}{\partial \tau_2}, \dots, \frac{\partial A}{\partial \tau_k},$$

quindi non dipende dal punto scelto sulla generatrice, ma solo da x, e coincide, in virtù delle equazioni scritte, con lo S_k tangente in x a V_k. Dunque $V' \equiv V_k$ è rigata ed ammette uno S_k tangente fisso per tutti i punti di una generatrice, c. d. d.

Si noti che nella dimostrazione non è stato necessario derivare le equazioni date, e che quindi il risultato vale per ogni singolo punto x per cui valgano quelle equazioni.

(1) F. Schur, loc. cit., pag. 345.

(2) Se fossero nulle tutte le c la V_n sarebbe uno S_n, se fossero nulli tutt'i minori del 2° ordine la V_n sarebbe la (n-1)-esima sviluppabile di una curva: casi evidenti a priori.

Ciò equivale alla possibilità di scrivere gli $n-2$ gruppi di equazioni seguenti:

$$\begin{cases} m_1 c_{11} + n_1 c_{21} + p_1 c_{31} = 0 \\ m_1 c_{12} + n_1 c_{22} + p_1 c_{32} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1 c_{1n} + n_1 c_{2n} + p_1 c_{3n} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} m_2 c_{11} + n_2 c_{21} + p_2 c_{41} = 0 \\ m_2 c_{12} + n_2 c_{22} + p_2 c_{42} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_2 c_{1n} + n_2 c_{2n} + p_2 c_{4n} = 0 \end{cases}; \ldots;$$

$$\begin{cases} m_{n-2} c_{11} + n_{n-2} c_{21} + p_{n-2} c_{n1} = 0 \\ m_{n-2} c_{12} + n_{n-2} c_{22} + p_{n-2} c_{n2} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_{n-2} c_{1n} + n_{n-2} c_{2n} + p_{n-2} c_{nn} = 0 \end{cases},$$

cioè anche:

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1^2}\right)^0 + n_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^0 + p_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_1}\right)^0 = 0 \\ m_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^0 + n_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2^2}\right)^0 + p_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_2}\right)^0 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1 \partial x_n}\right)^0 + n_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2 \partial x_n}\right)^0 + p_1 \left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_n}\right)^0 = 0 \end{cases}; \ldots$$

Si noti però che le equazioni stesse sono pure soddisfatte dalle altre coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, essendo nulle tutte le derivate seconde che vi compariscono. Si tratta dunque del sistema di $n-2$ gruppi di n equazioni ciascuno, soddisfatto dalle coordinate dei punti della varietà (e dall'unità) nell'intorno dell'origine: il ragionamento ricordato nel num. preced. porta a concludere che per l'origine passa uno S_{n-2} contenuto nella varietà, e che questa ha in ogni punto di esso uno S_n tangente fisso. Ma poichè l'origine è stata scelta ad arbitrio sulla varietà, si conclude che:

Condizione necessaria per la deformabilità di una V_n *di* S_{n+1} *è che essa sia luogo di* $\infty^2 S_{n-2}$, *e che abbia uno* S_n *tangente fisso lungo ognuno dei suoi spazii generatori.*

4. Per veder meglio la natura di una tale V_n si osservi che la sua sezione con uno S_4 generico è una congruenza di rette con carattere di sviluppabile (1), in cui ciascuna generatrice è incontrata da due delle infini-

(1) C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. XXX (1910), pp. 87-121, n. 29; e F. Schur, loc. cit., § 11.

tamente vicine: per la genericità dello S_4 si conclude che ciascuno degli S_{n-2} generatori della V_n è incontrato da due degli infinitamente vicini in S_{n-3}, o, in altre parole, gli ∞^2 S_{n-2} possono distribuirsi *in due modi*, come spazii osculatori ad ∞^1 curve. Le due superficie luoghi di questi spigoli di regresso contengono un doppio sistema coniugato di linee (*caratteristiche*) del quale quelle curve fan parte: son due superficie della specie Φ [1] cioè le coordinate proiettive omogenee dei punti (x_i) di una di esse (riferita ai parametri variabili separatamente sulle caratteristiche) sono soluzioni di un'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} + a \frac{\partial x}{\partial t_1} + b \frac{\partial x}{\partial t_2} + cx = 0.$$

Anzi le due superficie possono considerarsi ottenute, una dall'altra, applicando $n-2$ volte a ciascuna la trasformazione di Laplace (in un determinato verso) [2]; le equazioni rappresentate dalle due superficie *focali* si ottengono allo stesso modo una dall'altra.

Queste V_2 focali non sono le più generali della specie Φ (con un doppio sistema coniugato) perchè la condizione trovata è semplicemente necessaria, e le altre condizioni per la deformabilità debbono appunto riflettersi sulla natura di queste V_2. Lasciando al num. successivo il precisare queste particolarità, possiamo intanto dire che la nostra V_n ammette la generazione seguente:

Si consideri in S_{n+1} *una particolare superficie* V_2 *con un doppio sistema coniugato, rappresentante cioè un'equazione di Laplace*:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t_1} + b \frac{\partial x}{\partial t_2} + cx = 0.$$

Gli S_{n-2} *osculatori alle curve di un sistema descrivono la* V_n [3].

5. Non però ogni V_n così costruita è deformabile. Lo Sbrana ha dimostrato analiticamente (e si potrebbe confermare con ragionamenti infini-

[1] C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi, legata colle equazioni alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1047-1079.

[2] E. Bompiani, *a*) *Sull'equazione di Laplace*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. XXXIV (1912), pp. 383-407, n. 3; *b*) *Sur les configurations de Laplace*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, tom. 156 (1913), pp. 603-605, n. 3.

[3] Cfr. per $n = 3, 4, 5$, Sbrana, loc. cit., *a*) § 20; *b*) § 7 in fine; per n qualunque rimane confermata una fondata supposizione dello Sbrana (loc. cit., *a*), § 21): l'identità dei suoi enunciati con i nostri dipende appunto dalle considerazioni citate nella nota precedente, per le quali si può fare a meno di considerare le superficie intermedie fra due date in una certa successione di trasformate di Laplace. Per es. che i piani tangenti ad una superficie Φ possano considerarsi come osculatori alle caratteristiche (in un sistema) di una trasformata di Φ risulta dalla mia Nota cit. *b*), n. 3.

tesimali) che gli S_{n-2} si mantengono rigidi nella deformazione. Vogliamo tradurre questa condizione in un'altra relativa alle superficie focali.

Intanto è chiaro che con la V_n si deformano queste V_2 lasciando coniugati i sistemi coniugati. Ma poichè gli S_{n-2} rimangono rigidi, e questi (per il num. prec.) sono osculatori ad un sistema di caratteristiche su ciascuna V_2, di queste caratteristiche rimangono inalterati nella deformazione tutti gli elementi contenuti in uno S_{n-2}, cioè le prime $n-3$ curvature. E poichè in queste condizioni esiste effettivamente una deformazione (finita o infinitesima) della V_n (secondo che le V_2 focali sono deformabili in modo finito o infinitesimo) (1) si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la V_n *costruita al numero precedente sia deformabile, è che si possano deformare (in modo finito o infinitesimo) le due* V_2 *focali (ciascuna* $(n-2)$*-esima trasformata di Laplace dell'altra) in modo che si conservino inalterate le prime* $n-3$ *curvature delle caratteristiche a cui gli* S_{n-2} *di* V_n *sono osculatori.*

Solo per ($n=3$, cioè per) S_4 il problema di deformare, nel modo ordinario e simultaneamente, due superficie contigue in una successione di Laplace coincide con la ricerca delle V_3 deformabili (2).

La deformazione di una V_n avviene, quando sia possibile, deformando le sviluppabili formate dagli S_{n-2} e lasciando questi inalterati: ma le $(n-2)$-esime sviluppabili di due curve non sono sovrapponibili con i loro spazii generatori se le due curve non hanno le stesse prime $n-2$ curvature nei punti che verranno a sovrapporsi. Nel nostro caso questi spigoli di regresso sono le caratteristiche (in un sistema) delle superficie focali: sicchè, mentre dal teorema precedente risulta necessario che dette caratteristiche conservino nella deformazione le prime $n-3$ curvature, *esse conservano effettivamente anche le* $(n-2)$*-esime.*

Il problema che nasce nel caso più generale di deformare una superficie lasciando inalterate certe curvature di un suo dato sistema di linee, mi pare di per sè interessante: e mi propongo di ritornarvi altrove.

6. Ogni V_ν ($\nu < n$) contenuta in V_n è deformabile.

(1) Analiticamente le condizioni si presentano in modo distinto: cfr. i due lavori dello Sbrana.

(2) Cfr. Sbrana, loc. cit., *a*), § 19.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota del prof. C. Severini, presentata dal Socio S. Pincherle.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.