ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sur certaines équations intégrales.* Nota di J. SOULA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Cette Note est consacrée à l'étude de quelques équations de la forme:

$$(1)\quad (a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\,\overset{\times\times}{K^m}(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{F_1})\,\overset{\times\times}{K^{m-1}}(xy) + \cdots + \\ + (a_{m-1} + \overset{\times\times}{F_{m-1}})\,\overset{\times\times}{K}(xy) + F_m(xy) = 0\,,$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_m$ sont des fonctions données intégrables dans le champ des variables réelles $(a \leq x \leq b\ ,\ a \leq y \leq b)$, où $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ sont des constantes, où $K(xy)$ est la fonction inconnue, $\overset{\times\times}{K^m}(xy)$ la puissance composée d'ordre m du noyau $K(xy)$, où enfin les symboles tels que

$$(a_{m-1} + \overset{\times\times}{F_{m-1}})\,\overset{\times\times}{K}(xy)$$

représentent le résultat de la composition de deuxième espèce:

$$(a_{m-1} + \overset{\times\times}{F_{m-1}})\,\overset{\times\times}{K}(xy) = a_{m-1}\,K(xy) + \int_a^b F(xs)\,K(sy)\,ds\,.$$

Ces équations ont été étudiées, dans certains cas, par MM. Lauricella et Volterra [1]. Je voudrais surtout montrer que les équations de la forme (1) peuvent être classées en catégories très différentes par la nature de leurs solutions.

1. Commençons par supposer $F_m(xy)$ égal à zéro et a_{m-1} différent de zéro. L'équation peut s'écrire:

$$K(xy) = -\frac{1}{a_{m-1}}\int_a^b N(xs)\,K(sy)\,ds$$

avec

$$N(xy) = (a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\,\overset{\times\times}{K^{m-1}}(xy) + \cdots + \overset{\times\times}{F_{m-1}}\,\overset{\times\times}{K}(xy)\,.$$

Admettons que $K(xy)$ soit une solution bien determinée de cette équation. En regardant y comme un paramètre fixe, on peut dire que $K(xy)$ est solution d'une équation de Fredholm sans second membre de noyau $N(xy)$ pour la constante caractéristique $-\dfrac{1}{a_{m-1}}$. Le noyau $N(xy)$ est inconnu;

[1] Lauricella, Atti della R. Accad. dei Lincei, 18 juin 1911 et 16 mars 1913; Annali di Matematica, octobre 1913. Volterra, Atti della R. Accad. dei Lincei, 23 avril 1911 et 27 juillet 1913; *Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne*, page 183.

nous savons, cependant, qu'il ne peut admettre qu'un nombre fini de solutions fondamentales linéairement distinctes pour la constante $-\frac{1}{a_{m-1}}$. Je désigne ces solutions fondamentales par

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x).$$

La solution fondamentale $K(xy)$ est une combinaison linéaire de celles-là, dont les coëfficients peuvent dépendre du paramètre y. $K(xy)$ est donc de la forme:

$$(2) \qquad K(xy) = a_1(x)\, b_1(y) + a_2(x)\, b_2(y) + \cdots + a_n(x)\, b_n(y).$$

2. Je me contenterai de ce résultat dans le cas général.

Supposons les fonctions $F_0, F_1, \dots, F_m$ deux à deux permutables, et ne cherchons que les fonctions $K(xy)$ permutables à $F_0, F_1, \dots, F_m$.

J'ai démontré [1] que, dans ces conditions, $a_1(x), a_2(x), \dots, b_1(y), b_2(y), \dots$ sont des combinaisons linéaires des fonctions principales de $F_i(xy)$: et cela pour toutes les valeurs de i.

Dans cette Note je n'étudierai qu'un cas particulier dont j'aurai besoin tout à l'heure: le cas où les fonctions $F_i(xy)$ sont des sommes de puissances composées, d'un même noyau $G(xy)$

$$(3) \qquad F_i(xy) = e_{i1}\, G(xy) + e_{i2}\, \overset{\times\times}{G^2}(xy) + \cdots \qquad (i = 0, 1, \dots, m \quad 1),$$

ces séries étant intégrables terme à terme; et encore je ne chercherai pas systématiquement toutes les solutions.

1°) Soient $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ deux solutions fondamentales de $G(xy)$ à droite et à gauche, correspondant à une même constante caractéristique de $G(xy)$, telles, de plus, que

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 1,$$

ce qui exige que la constante caractéristique soit simple.

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont aussi solutions fondamentales de $F_i(xy)$ et on a:

$$\int_a^b F_i(xs)\, \varphi(s)\, ds = \frac{\varphi(x)}{\mu_i}, \quad \int_a^b F_i(sy)\, \psi(s)\, ds = \frac{\psi(y)}{\mu_i}$$
$$(i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Cherchons une solution de la forme $\frac{\varphi(x)\, \psi(y)}{\lambda}$. On aura:

$$\varphi(x)\, \psi(y) \left[\left(a_0 + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{1}{\lambda^m} + \left(a_1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \frac{1}{\lambda^{m-1}} + \cdots + \left(a_{m-1} + \frac{1}{\mu_{m-1}}\right) \frac{1}{\lambda} \right] = 0$$

[1] Atti della R. Accad. dei Lincei, 16 février 1913.

et il est toujours possible de choisir λ pour qu'il en soit ainsi (si $m > 1$).

$\varphi(x)$ étant ainsi choisi, si on remplaçait $\psi(y)$ par une fonction quelconque $\psi'(y)$ telle que

$$\int_a^b \varphi(s)\,\psi'(s)\,ds = 1\,,$$

$\dfrac{\varphi(x)\,\psi'(y)}{\lambda}$ serait toujours une solution de (1); mais elle ne serait plus permutable à $F_i(xy)$.

2°) Supposons qu'il existe deux fonctions $h(x)$, $l(y)$, telles que

$$(4)\qquad \int_a^b h(s)\,l(s)\,ds = 1\ ,\quad \int_a^b G(xs)\,h(s)\,ds = \int_a^b G(sy)\,l(s)\,ds = 0\,.$$

Cherchons une solution de la forme $\dfrac{h(x)\,l(y)}{\lambda}$. On devra avoir:

$$h(x)\,l(y)\left[\frac{a_0}{\lambda^m} + \frac{a_1}{\lambda^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\lambda}\right] = 0\,,$$

et on pourra trouver λ vérifiant cette condition.

3°) Soient deux solutions $K(xy)$ et $K'(xy)$ de l'équation (1), telles que:

$$\overset{\times\times}{K}\,\overset{\times\times}{K'} = \overset{\times\times}{K'}\,\overset{\times\times}{K} = 0\,.$$

$K + K'$ est alors solution de (1). Or les solutions déjà trouvées peuvent être supposées ortogonales deux à deux.

On pourrait trouver de même des solutions formées non plus exclusivement avec des solutions fondamentales, mais aussi avec des fonctions principales.

L'équation (1), *quand les* $F_i(xy)$ *ont la forme* (3) *et quand* $F_m(xy)$ *est nul et* a_{m-1} *non nul, admet en général une infinité de solutions de la forme* (2), *et n'admet que des solutions de cette forme.*

3. Étudions maintenant l'équation:

$$(5)\qquad (a_0 + \overset{\times\times}{F}_0)\,\overset{\times\times}{K}{}^m(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{F})\,\overset{\times\times}{K}{}^{m-1}(xy) + \cdots + \\ + (1 + \overset{\times\times}{F}_{m-1})\,\overset{\times\times}{K}(xy) + F_m(xy) = 0\,,$$

où le coëfficient constant de $K(xy)$ est différent de zéro (nous le supposons égal à 1) et où les fonctions F_0, F_1, ... sont des sommes de puissances composées d'un même noyau $zG(xy)$

$$F_i(xy) = e_{i1}\,zG(xy) + e_{i2}\,z^2\overset{\times\times}{G}{}^2(xy) + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)\,.$$

Supposons $G(xy)$ borné; supposons aussi, qu'il existe une série à rayon de convergence infini, a coëfficients réels positifs

$$A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots$$

telle que

$$|e_{in}| < A_n \qquad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

On aura, alors,

$$|e_{in} \overset{\times\times}{G}{}^n(xy)| < A_n d^n,$$

d étant un nombre positif fixe.

Les fonctions $F_i(xy)$, et aussi les séries

$$f_i(z) = e_{i1} z + e_{i2} z^2 + \cdots + e_{in} z^n + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

sont des fonctions entières de z; de plus, $F_i(xy)$ admet une série majorante indépendante de x et de y.

Employons la méthode de M. Volterra sous la forme indiquée par M. Lebesgue [1]. Écrivons l'équation obtenue en remplaçant, dans (5), $zG(xy)$ par z, $K(xy)$ par u et les opérations de composition par des produits. On obtient

$$(6) \qquad (a_0 + f_0(z))\, u^m + (a_1 + f_1(z))\, u^{m-1} + \cdots + \\ + (1 + f_{m-1}(z))\, u + f_m(z) = 0.$$

La solution de cette équation algébrique en u, qui devient nulle pour $z = 0$, peut être considérée comme branche d'une fonction analytique non uniforme de z, et peut être developpée en série à rayon de convergence fini:

$$(7) \qquad u = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

Les points singuliers de la fonction analytique $f(z)$ seront désignés par $\beta_1, \beta_2, \ldots$

Considérons la série:

$$(8) \qquad F(z|xy) = c_1 z\, G(xy) + c_2 z^2 \overset{\times\times}{G}{}^2(xy) + c_3 z^3 \overset{\times\times}{G}{}^3(xy) + \cdots$$

Elle peut définir une fonction analytique de z, $F(z|xy)$. Ses coëfficients sont les produits des coëfficients de même rang de la série (7) et de la série

$$(9) \qquad \mathcal{G}(z|xy) = z\, G(xy) + z^2 \overset{\times\times}{G}{}^2(xy) + z^3 \overset{\times\times}{G}{}^3(xy) + \cdots$$

Cette dernière fonction, noyau résolvant de $G(xy)$ a pour pôles les constantes caractéristiques de $G(xy)$: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

On sait, d'aprés M. Hadamard que $F(z|xy)$, a pour points singuliers les seuls points $\alpha_i \beta_j$.

[1] Société math. de France, tome XL, 1912.

4. La fonction $F(z|xy)$ n'est pas, en général, uniforme: mais on peut obtenir une de ses déterminations par la formule de Parseval

$$F(z|xy) = \int_C \mathcal{G}(t|xy)\, f\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t},$$

(C) étant un contour du plan de la variable complexe t qui laisse à l'extérieur les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et qui entoure les points $\frac{z}{\beta_i}$ et l'origine. Un pareil contour existe toujours si z n'est pas un point d'affixe $\alpha_i \beta_j$.

Transformons cette formule en remplaçant $\mathcal{G}(t|xy)$ par l'expression qu'en donne M. Fredholm:

$$\mathcal{G}(t|xy) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} t^n D_n(xy)}{\Delta(t)},$$

dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières de t. On sait, de plus, que le numérateur admet une série majorante dont les termes sont indépendants de x et de y. L'expression $\frac{f\left(\frac{z}{t}\right)}{t\,\Delta(t)}$ est une fonction holomorphe de t sur le contour (C) et dans une région annulaire entourant le contour (z n'étant pas singulier). Son module admet une borne supérieure. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n f\left(\frac{z}{t}\right)}{t\,\Delta(t)} D_n(xy)$$

peut donc s'intégrer terme à terme. On a donc un résultat de la forme:

$$F(z|xy) = \sum_1^{\infty} P_n(z) \,.\, D_n(xy)\,; \tag{10}$$

et cette dernière série admet, pour une valeur déterminée de z, une série majorante dont les termes sont indépendants de x et de y. On peut donc intégrer terme à terme en x et y la série (10), et aussi les produits de séries de la forme (10) obtenues de la même manière. D'autre part, on démontre sans difficulté que les fonctions $D_n(xy)$ sont des sommes d'un nombre fini de puissances composées de $G(xy)$.

On pourra conclure, de ces remarques que les puissances composées de $F(z|xy)$ défini par l'équation (10) sont des fonctions analytiques de z; que $F(z|xy)$ est permutable à $G(xy)$ et aussi à toute fonction bornée permutable à $G(xy)$.

5. Montrons, maintenant, que $F(z|xy)$ vérifie l'équation (5). Si on remplace $K(xy)$ par $F(z|xy)$, le premier membre de l'équation (5) est d'après

ce qui précède une fonction analytique de z. Si z est inférieur au rayon de convergence de la série (8), cette fonction est nulle; les calculs qui permettront de la vérifier, correspondent à ceux qui permettent de vérifier que la série (7) est solution de l'équation (6). Si maintenant z prend une valeur quelconque, cette même fonction analytique reste nulle.

Il existe donc une solution de l'équation (5) *pour toute valeur de* z, *qui n'est pas de la forme* $\alpha_i \beta_j$.

6. Supposant que z n'est pas une de ces valeurs singulières, cherchons les autres solutions de l'équation (5) permutables à $G(xy)$.

On a vu qu'elles seront aussi permutables à la solution déjà obtenue, $F(xy)$. $K(xy)$ étant une de ces solutions, posons:

$$K(xy) = F(xy) + \Phi(xy).$$

L'équation que vérifie $\Phi(xy)$, est de la forme:

$$(11) \qquad (a_0 + \overset{\times\times}{H}_0)\, \overset{\times\times}{\Phi}{}^m(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{H}_1)\, \overset{\times\times}{\Phi}{}^{m-1}(xy) + \cdots + \\ + (1 + \overset{\times\times}{H}_{m-1})\, \overset{\times\times}{\Phi}(xy) = 0,$$

où on a

$$H_0 = F_0 \; ; \; H_1 = F_1 + m(a_0 + \overset{\times\times}{F}_0)\, \overset{\times\times}{F} \; ;$$

$$H_2 = F_2 + (m-1)(a_1 + \overset{\times\times}{F}_1)\, \overset{\times\times}{F} + \frac{m(m-1)}{2}(a_0 + \overset{\times\times}{F}_0)\, \overset{\times\times}{F}{}^2 \; ;$$

Ces fonctions $H_i(xy)$ peuvent donc être developpées en séries régulièrement convergentes, dont les termes sont des sommes de puissances composée de $G(xy)$. Les considérations du paragraphe 2 sont donc applicables.

Si z *n'est pas une valeur singulière, l'équation* (5) *admet en général une infinité de solutions. Ces solutions s'obtiennent en ajoutant à* $F(xy)$ *des fonctions de la forme*

$$a_1(x)\, b_1(y) + \cdots + a_n(x)\, b_n(y),$$

les $a(x)$ *et* $b(y)$ *étant certaines combinaisons linéaires des fonctions principales de* $G(xy)$.

La même méthode peut être appliquée au cas où les fonctions envisagées dépendent non plus d'un seul noyau $G(xy)$, mais de plusieurs fonctions permutables [1].

Si la constante a_{m-1} est nulle, le problème est de nature bien différente; c'est ce que montrent les exemples traités par. M. Lauricella.

[1] Lebesgue, loc. cit.