ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

$$
\mathrm{S}_0)\left\{\begin{aligned}
x_0 &= \frac{2-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
x_1 &= \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau+\tau_0)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
x_2 &= \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau-\tau_0)}{2i\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
x_3 &= \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0-1)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}
\end{aligned}\right.
\qquad
\mathrm{S})\left\{\begin{aligned}
\bar{x}_0 &= \frac{2+ff_0-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
\bar{x}_1 &= \frac{\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)-ff_0}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
\bar{x}_2 &= \frac{f+f_0}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\\
\bar{x}_3 &= \frac{f-f_0}{2i\sqrt{1-\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}}\,.
\end{aligned}\right.
$$

In modo perfettamente simile a quello qui usato pel problema α), si troverebbero in termini finiti le coppie $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S})$ di superficie applicabili che risolvono i problemi β) e γ) in geometria iperbolica quando per inviluppo di rotolamento si assuma una sfera appartenente ad una qualunque delle tre specie.

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)}=1$. Nota I del Corrispondente F. Enriques.

1. Il problema capitale della teoria delle superficie algebriche è la classificazione di queste, cioè la determinazione effettiva delle *famiglie* di superficie distinte per trasformazioni birazionali, ciascuna famiglia venendo caratterizzata da un gruppo di caratteri interi invarianti e contenendo, entro di sè, un'infinità continua di *classi* dipendenti da un certo numero di parametri (moduli).

Vale la pena di esaminare quali resultati d'insieme si possano trarre dal lavoro dell'ultimo ventennio, in ordine al suddetto problema di classificazione.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota, in cui pervengo alle conclusioni che seguono:

La classificazione delle superficie algebriche, conduce naturalmente a considerare il genere d'ordine 12 : P_{12}.

Per $\mathrm{P}_{12}=0$ si ha la famiglia delle rigate.

Per $\mathrm{P}_{12}=1$ si hanno le superficie possedenti *curve canoniche* o *pluricanoniche d'ordine* 0 (tutti i P_i essendo $=0, 1$).

Per $\mathrm{P}_{12}>1$ si hanno le superficie con curve canoniche o pluricanoniche effettive, d'ordine >0.

Per $P_{12} \geq 1$ il genere lineare $p^{(1)} \geq 1$ (mentre si può ritenere — com'è noto — $p^{(1)} \leq 0$ per le rigate, cioè per $P_{12} = 0$).

Ad ogni valore del genere lineare $p^{(1)} > 1$ corrisponde un *numero finito di famiglie* di superficie.

Per $p^{(1)} = 1$ si ha un'*infinità numerabile di famiglie* in cui entrano *due interi arbitrari*; tali famiglie sono caratterizzate dal contenere un fascio di curve ellittiche, salvo per $p_g = P_4 = 1$: in questo caso si hanno superficie di generi geometrici,

$$p_g = P_1 = P_2 = \cdots = 1\,,$$

e di genere numerico,

$$p_a = 1 \quad \text{o} \quad p_a = -1\,,$$

dipendenti altresì da un intiero arbitrario (e da 19 o 3 moduli rispettivamente) che non contengono, *in generale*, fasci di curve ellittiche.

La costruzione e lo studio delle superficie con $p^{(1)} = 1$ ($p_g P_4 \neq 1$) dà luogo a sviluppi interessanti in ordine ai valori dei plurigeneri, alla base e ai moduli. Questi sviluppi sono riferiti, per semplicità, al caso delle superficie regolari ($p_a = p_g$). Ma l'estensione al caso $p_a < p_g$ non presenta difficoltà essenziali.

2. Nella teoria delle superficie s'introducono, com'è noto, i seguenti caratteri invarianti [1]:

a) il genere geometrico $p_g = P_1$, ed i plurigeneri $P_2, P_3, \ldots$;

b) il genere lineare (virtuale) $p^{(1)}$;

c) il genere numerico (o aritmetico) p_a.

La classificazione delle superficie secondo i valori dei plurigeneri conduce a considerare in ispecie il 12-genere, P_{12}, e a distinguere i tre casi:

$$P_{12} = 0\,,\ P_{12} = 1\,,\ P_{12} > 1\,.$$

La condizione

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

caratterizza la famiglia delle superficie razionali e rigate [2].

3. La condizione

$$P_{12} = 1$$

caratterizza le superficie possedenti una curva canonica o pluricanonica d'ordine 0, sopra le quali (riferendosi ad un modello senza curve eccezionali) ogni sistema di curve di genere (virtuale) π è di grado (virtuale)

$$n = 2\pi - 2\,.$$

(1) Cfr. F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

(2) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

Il teorema sopra enunciato risulta dall'analisi delle differenti famiglie di superficie con $P_{12} = 1$, che sono le seguenti:

a) Per $p_a = -1$, le superficie iperellittiche irregolari, cioè:

a') le superficie iperellittiche di rango 1 (di Picard) caratterizzate [1] da

$$p_a = -1 \quad , \quad p_g = P_4 = 1 ,$$

e formanti un'infinità numerabile di famiglie (con 3 moduli) indipendenti da un numero intero δ, detto il divisore di codeste superficie [2];

a'') le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ che formano 7 famiglie di superficie ellittiche

$$(r = 2, 3, 4, 6)$$

di determinante $n = 2, 4, 3, 9, 4, 8, 6$, classificate da Bagnera - De Franchis e caratterizzate [3] mediante i valori dei plurigeneri che per esse sono uguali a 0 e 1. Si ha infatti, per codeste superficie, secondochè $r = 2, 3, 4, 6$, un primo plurigenere non nullo, $P_2 = 1$, o $P_3 = 1$, o $P_4 = 1$, o $P_6 = 1$, e quindi, in ogni caso,

$$P_{12} = 1 .$$

b) Per

$$p_a = 0 ,$$

le superficie coi generi dispari nulli e coi generi pari uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_3 = 0 , \quad P_2 = 1 ,$$

e riducibili alla sestica che passa doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro (10 moduli) [4].

c) Per

$$p_a = 1 ,$$

le superficie con tutti i generi uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_4 = 1 \ \text{[5]},$$

(1) Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

(2) Cfr. p. es. Enriques-Severi, *Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques*, in Acta Math., tom. 32.

(3) Enriques-Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, in Rendiconti Accad. Lincei, 1908.

(4) Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

(5) Enriques, *Sui piani doppî di genere uno*, in Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), 1896.

le quali formano un' infinità numerabile di superficie dipendenti da un intero $\pi = 2, 3, \ldots$ (e da 19 moduli per ciascuna famiglia) (1).

Dimostriamo che, effettivamente, *i tipi* a) b) c) *esauriscono tutte le superficie con* $P_{12} = 1$.

A tale scopo si osservi anzitutto che, per $P_{12} = 1$, si hanno superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate, e perciò dovrà essere, intanto (2),

$$p_a \geq 1,$$

cioè

$$p_a = -1, \text{ o } p_a = 0, \text{ o } p_a = 1.$$

Ora vediamo che:

a) Una superficie per cui $p_a = -1$, avrà il genere geometrico $p_g = 0$ o $p_g > 0$, e sarà una superficie ellittica.

Pongasi $p_g = 0$. Il calcolo dei plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$ conduce a $P_m > 1$ per $m = 3, 4, \ldots$, se $P_2 > 0$ (3). In questa ipotesi si ha (almeno) una curva bicanonica C e una curva tricanonica K; e combinando linearmente 3C e 2K, si ottiene un fascio di curve sesticanoniche: $P_6 \geq 2$, e, *a fortiori*, $P_{12} > 1$.

Se invece si suppone il bigenere $P_2 = 0$, si distinguono 4 categorie di superficie (4) e per l'ultima è $P_2 = 2$ ($P_{12} > 1$). Le superficie delle tre prime categorie hanno $P_{12} = 1$ soltanto nel caso in cui contengano un fascio ellittico di curve di genere $\pi = 1$, cioè nel caso delle superficie (iperellittiche) in cui le curve pluricanoniche sono d'ordine 0; per $\pi > 1$ risulta sempre $P_{12} > 1$.

Infine, per $p_a = -1$, $p_g > 0$, l'ipotesi $P_{12} = 1$ porterà $p_g = 1$, $P_4 = 1$.

b) In secondo luogo si supponga

$$p_a = 0 \quad , \quad P_{12} = 1.$$

Non può essere $p_g = 1$, perchè le condizioni $p_g = 1$ e $P_4 = 1$ (conseguenza di $P_{12} = 1$) portano $p_a = -1$ o $p_a = +1$ (5) e caratterizzano rispet-

(1) Cfr. Enriques, *Le superficie di genere uno*, in Rendiconti Accad. Bologna, 13 decembre 1908; Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, in Atti Istituto Veneto, 10 gennaio 1909.

(2) Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

(3) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, loc. cit.

(4) loc. cit., § 9.

(5) Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$", in Rendiconti Accad. Bologna, 7 decembre 1906.

tivamente le famiglie di superficie iperellittiche di Picard o di superficie coi generi 1 sopra menzionate. Si avrà, dunque,

$$p_a = p_g = 0$$

e $P_2 > 0$, poichè le condizioni $p_a = P_2 = 0$ caratterizzano le superficie razionali [1]; ma, essendo $P_{12} = 1$, si deduce $P_2 = 1$, $P_6 = 1$: quindi [2] $P_3 = 0$, e si ricade nel tipo della sestica sopra nominato.

c) Finalmente, se $p_a = 1$, la $P_{12} = 1$ porta $P_2 = 1$, e quindi si hanno superficie con tutti i generi uguali ad 1.

4. *La condizione*

$$P_{12} > 1$$

caratterizza l'insieme delle superficie possedenti infinite curve canoniche o pluricanoniche; ma occorre distinguere due casi, secondochè il genere lineare

$$p^{(1)} > 1$$

oppure

$$p^{(1)} = 1 .$$

Le superficie per cui

$$p^{(1)} > 1$$

avranno il genere

$$p_g \geq 0 ,$$

il bigenere

$$P_2 \geq p^{(1)} \geq 2 ,$$

il trigenere

$$P_3 \geq 3p^{(1)} - 2 \geq 4 ;$$

e i sistemi canonici e pluricanonici saranno, in ogni caso, di grado > 0.

Si deduce che:

Ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ può essere trasformata in una superficie (canonica o pluricanonica), le cui sezioni piane o iperpiane sono curve canoniche o pluricanoniche, superficie che ne porge un modello invariante.

La superficie *i* canonica riuscirà certo semplice per *i* assai grande. Ma, se non si fà distinzione tra superficie semplici e multiple [3], si può aggiungere che *esiste sempre un modello costituito da una superficie bicanonica*

[1] Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

[2] Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, loc. cit.

[3] La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche o bicanoniche ecc. si riducano a superficie multiple, costituisce un problema, che sembra ammettere un piccolo numero di soluzioni, e che additiamo all'attenzione degli studiosi.

per $p^{(1)} > 3$, *ed un modello costituito da una superficie tricanonica per* $p^{(1)} = 2, 3$ [1].

Invece per $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$, *tutte le curve pluricanoniche sono composte delle curve ellittiche d'un fascio, sicchè non conducono ad un modello invariante della superficie.*

5. L'esistenza d'una superficie canonica o pluricanonica, modello invariante delle superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$, porta una conseguenza importante in ordine alla classificazione di queste.

Per ogni valore di $p^{(1)} > 1$, si hanno superficie canoniche di un ordine dato $p^{(1)} - 1$, o superficie bicanoniche d'ordine $4(p^{(1)} - 1)$, o tricanoniche d'ordine $9(p^{(1)} - 1)$, a sezioni di genere parimente dato. Ora, se si tratta di determinare le superficie d'un ordine dato, a sezioni di dato genere, cioè con una curva doppia d'ordine dato, il problema, di natura algebrica, condurrà ad un *numero finito* di famiglie distinte ed irriducibili, ogni famiglia essendo costituita da una serie continua di superficie e di classi proiettivamente (e, quindi, birazionalmente) distinte. Vediamo dunque che, *per* $p^{(1)} > 1$, *ad ogni valore del genere lineare* $p^{(1)}$ *corrisponde un numero finito di famiglie di superficie, con caratteri interi distinti.*

Questa conclusione non sussiste più per $p^{(1)} = 1$. Già, per $P_{12} = 1$, le superficie iperellittiche $(a, 1)$ e le superficie coi generi 1 (c) offrono *serie di famiglie dipendenti da un numero intero arbitrario.*

Si considerino ora in generale le *superficie con* $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$; la classificazione di queste superficie, che ci proponiamo di svolgere, condurrà a riconoscere che esse formano una *serie di famiglie in cui entrano due numeri interi arbitrari.*

6. Abbiamo già notato che le superficie con $P_{12} > 1$, $p^{(1)} = 1$, posseggono un fascio di curve ellittiche; lo stesso può dirsi delle superficie con $P_{12} = 1$ (per cui è sempre $p^{(1)} = 1$), fatta eccezione delle superficie coi generi geometrici 1:

$$p_g = P_{12} = 1 \qquad (p_a = -1, +1),$$

cioè dalle superficie *a)* *b)* e *c)* del n. 3.

Più precisamente: *le superficie con* $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$, *eccettuati i casi corrispondenti a* $p_g P_{12} = 1$, $(p_g = P_{12} = 1)$, *posseggono un fascio di curve ellittiche di genere* $p_g - p_a$, *per* $p_a \geq 0$, *ed invece un fascio di curve ellittiche di genere* p_g *ed un secondo di genere* 1 *nel caso* $p_a = 1$ [2].

[1] Alcune importanti diseguaglianze stabilite dal sig. A. Rosenblatt (Comptes rendus e Bull. Acad. Cracovie, 1912), permettono di aggiungere che $p_g > 3$; e quindi esiste una superficie canonica, appena $p^{(1)}$ sorpassa un certo limite.

[2] Cfr. Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$", in Rendiconti Accad. Bologna, decembre 1906.

Viceversa, le superficie con un fascio di curve ellittiche (non appartenenti alla famiglia delle rigate) hanno $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$ e $p_g P_4 \neq 1$ oppure $p_g P_4 = 1$; in quest'ultimo caso sono *superficie particolari* coi generi geometrici 1.

Vogliamo ora classificare le superficie possedenti un fascio di curve ellittiche C.

Un primo carattere di tali superficie, che designeremo col nome di *determinante d* di esse, è il minimo numero di punti in cui una curva K, non composta colle C del fascio, incontra le C, cioè l'*ordine del minimo gruppo di punti costruibili sopra ogni* C del fascio mediante operazioni razionali ed operazioni irrazionali non dipendenti dal parametro delle C.

Vi sono superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ $(p_g P_{12} \neq 1)$, *per cui il determinante ha un valore intero arbitrario*:

$$d = 1, 2, 3 \ldots$$

Ciò risulta già dalla costruzione delle superficie di genere $p_a = -1$. Questi esempii provano che « l'ordine minimo d'un gruppo di punti, costruibile sopra una curva ellittica non può generalmente essere abbassato al disotto dell'ordine della curva, *senza introdurre irrazionalità* dipendenti dai coefficienti dell'equazione della curva » (¹).

Si possono costruire altri esempii di superficie per cui $p^{(1)} = 1$, e d assume un valore arbitrariamente alto.

Si consideri p. es. un cono cubico F_3 e le sezioni di esso coi piani per una retta a. Sopra una generica di queste cubiche si può determinare un gruppo di 9 punti base per un fascio di curve d'ordine $3n$ con 9 punti $n$pli (fascio di Halphen); tale costruzione dipende dalla divisione dell'argomento delle funzioni ellittiche appartenenti alla cubica, e perciò riesce razionale rispetto al parametro del piano per a. Si deduce la costruzione razionale in ogni piano, per a, di una curva d'ordine $3n$ con 9 punti $n$pli, variabili su 9 rette distinte.

Codesta curva descrive in generale una superficie non riducibile alla famiglia delle rigate, per cui il genere lineare $p^{(1)} = 1$ e il determinante $d = n$. Si riconosce, infatti, che il determinante non può essere $< n$ se il fascio delle C_{3n} contiene (come avverrà generalmente) delle cubiche contate n volte.

7. *Ad ogni superficie* F^d *con un fascio di curve ellittiche* $C(p^{(1)} = 1)$, *di determinante* d, *si può far corrispondere una superficie di determinante* 1 *la quale possegga un fascio* (*dello stesso genere*) *di curve birazionalmente identiche alle* C.

(¹) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*, in Rendiconti Accad. Lincei, 7 gennaio 1912.

A tale scopo basta infatti costruire la superficie F′ i cui punti corrispondono alle serie g_n^{n-1} appartenenti alle C di F^d, codeste serie venendo prese come « elementi » di una varietà ∞^2.

Tale costruzione è stata già indicata nella mia citata Nota *Sulla superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*.

Fra le superficio F^d, F′, intercede una *corrispondenza algebrica* $[d, d]$, in cui si corrispondono le curve ellittiche birazionalmente identiche.

Infatti si considerino su F^d, F′ due generiche curve ellittiche omologhe C, K, e: su F^d una curva L secante la C in un gruppo G di d punti; su F′ la curva L′ unisecante K nel punto che rappresenta la g_d^{d-1} di C, definita da G_d. Se a questo punto di K si fa corrispondere uno, P, fra i d punti di G_d, resta determinata razionalmente fra K e C *una* corrispondenza biunivoca, perchè ogni punto di C, associato al gruppo dei $d-1$ punti $G_d - P$, dà un gruppo di d punti, a cui corrisponde — per costruzione — un punto di K.

In tal guisa si hanno appunto d corrispondenze biunivoche fra K, C, le quali non possono essere razionalmente staccate al variare del parametro da cui dipendono le curve K e C nei rispettivi fasci. Si ha dunque, fra K, C e fra F′, F^d, una corrispondenza algebrica $[d, d]$.

Sono in generale curve di coincidenza di questa corrispondenza sulla F′ le curve K dotate d'un punto doppio; sulla F^d sono parimente curve di coincidenza le C dotate d'un punto doppio (corrispondenti alle nominate K), ma anche le curve C che si riducono a curve *ellittiche multiple*, curve da contarsi un certo numero s di volte, dove s è un divisore di d. Così restano fissate anche le curve di diramazione della corrispondenza $[d, d]$ fra F′, F^d; e si possono quindi dedurre i caratteri della seconda superficie da quelli della prima.

Le superficie F′, F^d di genere lineare $p^{(1)} = 1$ hanno il medesimo invariante di Zeuthen-Segre (corrispondendosi le C, K dotate di punto doppio), e quindi il medesimo genere numerico p_a; esse hanno la stessa irregolarità (che è, per $p_a > -1$, il genere del fascio di curve ellittiche), e perciò lo stesso genere geometrico p_g. Ma i loro plurigeneri non sono necessariamente uguali.

Consideriamo, per semplicità, il caso delle superficie regolari

$$p_a = p_g = p.$$

Sulla F′ il sistema canonico è costituito dai gruppi di $p-1$ curve ellittiche K, senza parti fisse: quindi

$$P_i = i(p-1) + 1.$$

Invece la F^d potrà possedere delle curve ellittiche multiple secondo numeri s (> 1) divisori di d; ed è facile verificare che ognuna di queste curve, θ, contata $s-1$ volte, costituisce una parte fissa del sistema canonico, da aggiungersi alle $p-1$ curve C variabili: si deduce, quindi,

$$P_i = i(p-1) + \sum \left[\frac{i(s-1)}{s}\right] + 1 .$$

Ciò risulta dal fatto che la θ è curva di coincidenza, e non di diramazione, per la corrispondenza $[d, d]$ fra F^d, F' (¹); oppure mediante la costruzione del sistema canonico di F^d, a partire da una rete contenente il fascio (C) (²).

La curiosa circostanza che i plurigeneri possano così assumere diversi valori in confronto al genere, è stata già segnalata nello studio dei piani doppî di genere lineare $p^{(1)} = 1$, che costituiscono le superficie regolari di determinante 2 (³).

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale.* Nota II di Emma Sciolette, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella Nota I ho detto che il quesito relativo alla dipendenza o no della condizione VI dalle precedenti, nella definizione d'integrale data da Lebesgue (⁴), comprende due parti: la parte α) relativa alla delimitazione del campo delle funzioni integrabili; la parte β) relativa a una proprietà dell'operazione « integrale ».

Esaurita la questione della parte α) in favore della indipendenza, rimane da esaminare la parte β), quella che, in altri termini, afferma la formula:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

[essendo $f(x)$ la funzione limite della successione crescente di funzioni $f_n(x)$, ciascuna integrabile] quando $f(x)$ è integrabile compatibilmente a quanto è stato detto relativamente alla parte α) della VI.

(¹) Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, in Rendiconti Istituto lombardo, ser. II, vol. XXXVI, pag. 495.

(²) Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, in Atti Accad. Torino (1901).

(³) Enriques, *Sui piani doppî di genere lineare $p^{(1)} = 1$*", in Rendiconti Accad. Lincei (1898).

(⁴) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* Paris, Gauthier-Villars, 1904, cap. XII, pag. 99.