ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

curve, θ, contata $s-1$ volte, costituisce una parte fissa del sistema canonico, da aggiungersi alle $p-1$ curve C variabili: si deduce, quindi,

$$P_i = i(p-1) + \sum \left[\frac{i(s-1)}{s} \right] + 1 .$$

Ciò risulta dal fatto che la θ è curva di coincidenza, e non di diramazione, per la corrispondenza $[d, d]$ fra F^d, F' [1]; oppure mediante la costruzione del sistema canonico di F^d, a partire da una rete contenente il fascio (C) [2].

La curiosa circostanza che i plurigeneri possano così assumere diversi valori in confronto al genere, è stata già segnalata nello studio dei piani doppî di genere lineare $p^{(1)} = 1$, che costituiscono le superficie regolari di determinante 2 [3].

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale.* Nota II di EMMA SCIOLETTE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nella Nota I ho detto che il quesito relativo alla dipendenza o no della condizione VI dalle precedenti, nella definizione d'integrale data da Lebesgue [4], comprende due parti: la parte α) relativa alla delimitazione del campo delle funzioni integrabili; la parte β) relativa a una proprietà dell'operazione « integrale ».

Esaurita la questione della parte α) in favore della indipendenza, rimane da esaminare la parte β), quella che, in altri termini, afferma la formula:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

[essendo $f(x)$ la funzione limite della successione crescente di funzioni $f_n(x)$, ciascuna integrabile] quando $f(x)$ è integrabile compatibilmente a quanto è stato detto relativamente alla parte α) della VI.

[1] Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, in Rendiconti Istituto lombardo, ser. II, vol. XXXVI, pag. 495.

[2] Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, in Atti Accad. Torino (1901).

[3] Enriques, *Sui piani doppî di genere lineare $p^{(1)} = 1$*", in Rendiconti Accad. Lincei (1898).

[4] Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* Paris, Gauthier-Villars, 1904, cap. XII, pag. 99.

Per l'integrale di Riemann, sùbito si riconosce che esso si può ricavare dalle sole condizioni I-V [1]. Non già che ogni operazione definita dalle I-V sia l'integrale di Riemann (perchè, come risulta da ciò che segue, le I-V definiscono un'operazione più generale); ma dalle I-V si ricava un'operazione tale che nel campo Riemanniano (cioè per le funzioni integrabili R) coincide con l'integrale di Riemann. Ora, poichè il teorema di Arzelà afferma che « ogni volta che la funzione limite è integrabile R, la formula (1) è verificata », ciò basta per dedurre che nel campo Riemanniano la parte β) della VI dipende dalle altre.

Per altro, essa potrebbe essere necessaria a definire l'integrale di Lebesgue.

Lebesgue fa risalire la teoria dell'integrazione alla teoria della misura; noi seguiremo per brevità la stessa via.

Si dimostra, infatti, in base alle prime cinque condizioni, che il problema dell'integrazione di una funzione qualunque è risoluto quando si sa integrare una funzione che assume il valore 1 nei punti di un insieme E e il valore 0 nei punti dell'insieme complementare: l'integrale di una tale funzione essendo definito come la misura dell'insieme E.

Ora i postulati dell'integrazione, tradotti in postulati della misura, dicono:

I. La misura della somma di due insiemi non aventi punti in comune è uguale alla somma delle misure.

II. La misura di un insieme è sempre ≥ 0.

III. Trasportando rigidamente un insieme, la sua misura resta inalterata.

IV. La misura di un intervallo è uguale alla sua lunghezza.

L'ultimo postulato, equivalente alla parte β) dell'ultimo postulato dell'integrale, è il seguente:

L'insieme somma di un'infinità numerabile di insiemi (misurabili), *ha per misura la somma delle misure.*

[1] Infatti, possiamo dire brevemente così: Data la funzione $f(x)$ e considerato l'intervallo d'integrazione (a, b) diviso in tanti intervalli parziali, la proprietà IV ci dice che l'integrale di $f(x)$ in (a, b) sarà uguale alla somma degli integrali nei singoli intervalli. Ora integrando in ciascuno di questi intervalli invece della $f(x)$, una volta il limite superiore, una volta il limite inferiore, per la proprietà II, l'integrale di $f(x)$ deve essere compreso fra questi altri due integrali: questi essendo definiti dalla proprietà V.

Facendo variare in un modo qualunque la ripartizione di (a, b) il valore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ varierà in modo da mantenersi sempre superiore a quello di $f(x)$, e l'integrale relativo al limite inferiore varierà invece in modo da mantenersi sempre inferiore a quello di $f(x)$. È chiaro che se il limite inferiore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ è uguale al limite superiore dell'integrale relativo al limite inferiore di $f(x)$, questo limite comune sarà l'integrale di $f(x)$. È la stessa condizione d'integrabilità Riemanniana.

Allora la ricerca è ridotta a quella di vedere se ogni *misura* costruita in base ai primi quattro postulati, soddisfa necessariamente anche l'ultimo, e se quindi coincide con la misura di Jordan per gli insiemi misurabili J e con quella di Borel-Lebesgue per gli insiemi misurabili B, L.

Le mie ricerche sono relative specialmente a questo punto.

Consideriamo prima un insieme misurabile J. Le condizioni I e IV affermano che « la misura della somma di un numero finito di intervalli finiti senza punti in comune è uguale alla somma delle lunghezze »; e dalla III si ottiene che « se un insieme è contenuto in un altro, la sua misura non può essere maggiore della misura dell'altro ».

Ciò basta per poter facilmente dedurre che *la misura di un insieme misurabile* J *è proprio la sua misura* J.

Per un insieme misurabile B la verifica non è ugualmente facile. Affrontando anzi il quesito in generale, come per gli insiemi misurabili J, non mi è stato possibile risolverlo. Invece, prendendo a esaminare insiemi particolari (misurabili B) ho potuto ottenere (in base sempre ai primi quattro postulati) una misura che coincide con quella di Borel-Lebesgue, quindi un risultato che, se non è generale, è però sufficiente ad assicurare la dipendenza della formula (1) nei casi più notevoli.

Consideriamo l'insieme dei numeri razionali R che è un insieme misurabile B e di misura nulla e ad esso applichiamo convenientemente i primi quattro postulati della misura.

Dalle condizioni II e IV ricaviamo, chiamando M(R) questa misura,

$$M(R) \geq 1\,, \tag{2}$$

se $(0\,,1)$ è l'intervallo d'integrazione.

Mediante una traslazione di ampiezza δ incommensurabile coi numeri razionali, si possono trasportare i punti razionali $\frac{p}{q}$ sopra i punti irrazionali $\frac{p}{q}+\delta$, ottenendo un insieme il quale:

a) avrà (in virtù della III) una misura uguale alla misura dell'insieme dato;

b) sarà limitato nell'intervallo $(\delta\,, 1+\delta)$: o meglio, se vogliamo supporre il segmento $(0\,,1)$ chiuso su sè stesso, si può dire che quelli tra i punti di R che per la traslazione esorbitano dall'intervallo $(0\,,1)$ [sarebbero i punti razionali compresi nell'intervallo $(1-\delta\,,1)$] vanno ad occupare l'intervallo $(0\,,0+\delta)$ rimasto vuoto, con che il nuovo insieme rimane ancora limitato nell'intervallo $(0\,,1)$;

c) non avrà nessun punto in comune con l'insieme primitivo (la ragione è ovvia).

Ciò posto, sia S_1 l'insieme somma dei due insiemi, il quale sarà ancora limitato, per quanto è stato detto, nell'intervallo $(0\,,1)$.

Per la I, avremo:

$$M(S_1) = 2\,M(R);$$

e, con deduzioni analoghe a quelle per cui si è scritta la (2),

$$(3) \qquad 2\,M(R) \leq 1\,.$$

Questa costruzione di un insieme uguale all'insieme dato R si può ripetere in un'infinità numerabile di modi differenti, prendendo l'ampiezza di traslazione δ uguale successivamente ai valori $\delta_1\,,\delta_2\,,\delta_3\,,\ldots$, ciascuno dei quali sia irrazionale e quindi incommensurabile coi numeri razionali; non solo ma bensì sia incommensurabile con tutti i valori δ di rango inferiore. Con ciò si viene a costruire un'infinità numerabile di insiemi R_1, R_2, R_3, ... ciascuno dei quali gode della proprietà *a*), *b*), *c*) rispetto all'insieme dato R e rispetto a tutti gli altri insiemi costruiti.

Sia ora S_n l'insieme somma degli n insiemi $R_1\; R_2\; R_3\,,\ldots\; R_n$, il quale sarà ancora limitato in $(0\,,1)$. Si può scrivere la relazione analoga alla (2) e alla (3):

$$(4) \qquad M(R)\cdot n \leq 1\,.$$

Essendo questa formula vera per qualunque valore di n crescente deve necessariamente essere

$$(5) \qquad M(R) = 0$$

Dunque, per l'insieme dei numeri razionali la misura Borel-Lebesgue è definita dai primi quattro postulati, l'ultimo risultando quindi come conseguenza dei precedenti.

Ma si può dire anche di più.

Sia Ω un qualunque insieme numerabile di punti

$$e_1\,,e_2\,,e_3\,,\ldots$$

e indichiamo con $d_{p\,,\,q}$ la distanza di un qualunque elemento e_p da un altro qualunque elemento e_q. Queste distanze sono tante quante sono le coppie $(e_p\,,e_q)$: quindi formano un insieme numerabile. Allora si può scegliere un numero reale δ_1 diverso da ogni $d_{p\,,\,q}$, e imprimere a Ω la traslazione δ_1, (anche questa volta operando sull'intervallo (0,1) considerato come chiuso su sè stesso) ottenendo un insieme Ω' che soddisferà evidentemente alle condizioni *a*), *b*) e *c*).

Chiamiamo ancora S_1 l'insieme somma di Ω con Ω'; essendo anche questo insieme numerabile, saranno numerabili anche le mutue distanze $d'_{p,q}$ di due qualunque dei suoi elementi.

Scegliendo un δ_2 diverso da ogni $d'_{p,q}$ e imprimendo a S_1 la traslazione δ_2, si otterrà un insieme S'_1 che godrà anch'esso delle proprietà $a)$, $b)$ e $c)$ rispetto all'insieme S_1. Chiamiamo S_2 l'insieme somma di S_1 con S'_1, e procediamo in modo analogo alla costruzione degli insiemi S_3, S_4...

Avremo le formule:

$$M(\Omega) \leq 1$$

$$M(S_1) = 2\,M(\Omega) \leq 1$$

$$M(S_2) = 2\,M(S_1) = 4\,M(\Omega) \leq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M(S_n) = 2^n\,M(\Omega) \leq 1\,.$$

L'ultima di queste formule dimostra, anche in questo caso di un insieme numerabile qualunque, che la misura è nulla e che coincide quindi con quella di Borel-Lebesgue.

Questo risultato, in virtù della I, si estende immediatamente anche agli insiemi che sono complementari di insiemi numerabili.

Onde, conchiudendo, si può dire:

« La parte β) della condizione VI è *dipendente* dalle altre non solo « tutte le volte che si tratta di integrale di Riemann, ma anche quando, « fuori del campo Riemanniano, le funzioni da integrare hanno per insiemi « associati (chiamando così quegli insiemi dalla cui misura discende l'in- « tegrale) insiemi misurabili J, o insiemi numerabili, o insiemi comple- « mentari di insiemi numerabili, essendo la misura di tali insiemi univo- « camente definite dai primi quattro postulati ».

Terminiamo citando, come esempio di integrale così definito, l'integrale della funzione di Dirichlet che assume il valore 0 in tutti i punti irrazionali e il valore 1 in tutti i punti razionali.