ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota I di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Profittando di alcune considerazioni, svolte in una mia recente Nota [1], si può, data un'equazione integrale di prima specie

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \mathrm{F}(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

in cui $\mathrm{K}(x, y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue [2], e per la quale esista almeno una soluzione $\mathrm{F}(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, costruire una funzione

$$\Phi(x, g(x)), \tag{2}$$

definita *quasi da per tutto* [3] nell'intervallo (a, b), dipendente da una funzione arbitraria $g(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, in modo che, comunque si assegni $g(x)$, la (2) rappresenti una soluzione della (1), sommabile insieme col suo quadrato, e che, inversamente, ogni soluzione così fatta sia dalla (2) rappresentata per una conveniente scelta della $g(x)$ medesima.

Indicando con

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{3}$$

la successione delle costanti del nucleo $\mathrm{K}(x, y)$, e con

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{4}$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots, \tag{5}$$

la successione delle coppie di funzioni ortogonali dello stesso nucleo, per le quali risultano soddisfatte le equazioni coniugate, simultanee,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \psi(y)\, dy$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(y, x)\, \varphi(y)\, dy \quad [4],$$

[1] *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVI, 2° semestre 1913.

[2] L'ipotesi che le funzioni $\mathrm{K}(x, y)$ ed $f(x)$ siano continue, potrebbe sostituirsi con altre più generali.

[3] Dicendo *quasi da per tutto*, intendiamo, come si suole da varî autori, che possano, al più, fare eccezione i punti di un insieme di misura nulla. Da tali insiemi si farà generalmente astrazione, considerandosi come identiche due funzioni eguali quasi da per tutto. In questo senso sono talvolta da riguardare le eguaglianze, che seguono nel testo.

[4] Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, pag. 461.

condizione necessaria e sufficiente, affinchè la soluzione della (1) sia unica, è che sia chiuso il sistema delle funzioni ortogonali (5). In tal caso la (2) risulta indipendente dalla $g(x)$, e, per rappresentare l'unica soluzione, conviene in particolare porre $g(x) = 0$, con che la (2) assume la forma più semplice.

Della costruzione della (2), che può ben dirsi rappresenti la *soluzione generale* dell'equazione (1), mi propongo di occuparmi in questa Nota.

1. È noto ([5]) che, *se il sistema delle funzioni ortogonali* (4) *è chiuso, condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie*

$$(6) \qquad \Sigma_n \lambda_n^2 a_n^2 \quad , \quad a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \,.$$

È noto ancora ([6]), che, *se il sistema delle funzioni ortogonali* (4) *non è chiuso, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie* (6), *e che, di più, si abbia*:

$$(7) \qquad f(x) = \Sigma_n a_n \varphi_n(x) \quad , \quad a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \,.$$

Delle due condizioni contemplate in quest'ultimo teorema, la seconda è una conseguenza della prima, se il sistema delle funzioni ortogonali (4) è chiuso: giacchè, tenuto conto delle eguaglianze,

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\, \psi_n(y)\, dy \\ \psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b \mathrm{K}(y\,,x)\, \varphi_n(y)\, dy \,, \end{cases} \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots)$$

dalla convergenza della (6) segue, per un noto teorema di Schmidt ([7]), la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\Sigma_n a_n \varphi_n(x)$, e quindi la (7) ([8]).

Il primo teorema è pertanto contenuto nel secondo, del quale solo conviene che ci occupiamo.

([5]) Cfr. E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX (1910), pag. 79, § 4.

([6]) Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di prima specie*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVIII, ser. 5ª, 2º sem., fasc. 3º (1909), § 2.

([7]) Cfr. E. Schmidt, loc. cit. ([4]), § 2.

([8]) Cfr. C. Severini, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, serie V, vol. III (1910), Memoria XI, § 5.

Posto che l'equazione (1) ammetta una soluzione F(y), sommabile insieme col suo quadrato, si ha (9):

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \mathrm{F}(y)\, \varphi_n(x)\, dx\, dy \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e, per la seconda delle (8),

$$\lambda_n a_n = \int_a^b \mathrm{F}(y)\, \psi_n(y)\, dy \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde, coincidendo le quantità $\lambda_n a_n$ coi coefficienti di Fourier della $\mathrm{F}(y)$ rispetto al sistema delle funzioni ortogonali (5), segue la convergenza della serie (6). Inoltre, per un noto teorema di Schmidt (10), deve sussistere la (7).

Inversamente, poichè

$$\int_a^b \left[\sum_m^{m+p}{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x) \right]^2 dx = \sum_m^{m+p}{}_n \lambda_n^2 a_n^2,$$

dalla convergenza della (6) si deduce che la successione

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{S}_m(x) = \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

converge in media nell'intervallo (a, b), ed esiste quindi una funzione $\mathrm{F}_1(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, unica e ben determinata, se si eccettuino i punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[\mathrm{F}_1(x) - \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x) \right]^2 dx = 0 \text{ (11)}.$$

Se ne deduce, applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \mathrm{K}(x, y) \left[\mathrm{F}_1(y) - \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(y) \right] dy = 0,$$

cioè

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \mathrm{F}_1(y)\, dy = \sum{}_n \lambda_n a_n \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \psi_n(y)\, dy,$$

(9) Cfr. E. Picard, loc. cit. (8), § 5.

(10) Cfr. E. Schmidt, loc. cit. (4), § 16.

(11) Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne,* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris), tome CXLIV, 1er sem. 1907, pp. 1022-1024. Cfr. anche H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten,* Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245; F. Riesz, *Ueber orthogonale Funktionensysteme,* Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse, Jahrgang, 1907, pp. 116-122.

e, per le (8),

$$\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\,\mathrm{F}_1(y)\,dy = \sum\nolimits_n a_n\,\varphi_n(x)\,,$$

donde, se è verificata la (7), risulta in fine:

$$\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\,\mathrm{F}_1(y)\,dy = f(x)\,.$$

2. Poichè, come è stato dianzi osservato, dalla convergenza della (6) segue la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\sum_n a_n\,\varphi_n(x)$, la condizione espressa dalla (7) può sostituirsi coll'altra che sia

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_1^m {}_n\, a_n\,\varphi_n(x) \right]^2 dx = 0\,,$$

cioè

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum\nolimits_n a_n^2 \ (^{12}).$$

Si ha così il teorema:

Affinchè l'equazione (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie* (6), *e che la* $f(x)$ *soddisfi all'equazione di chiusura del sistema delle funzioni ortogonali* (4):

$$(10)\qquad \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum\nolimits_n a_n^2\ ,\quad a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,.$$

Ancora, se si ricorda [13] che la condizione espressa dalla (10) equivale all'altra che si abbia:

$$(11)\qquad \int_a^b f(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(12)\qquad \int_a^b \theta(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots),$$

può dirsi [14]:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie* (6), *e risulti verificata la* (11), *per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali* (12).

(12) Cfr. C. Severini, loc. cit. (8), § 3.
(13) Cfr. G. Lauricella, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX, 1° sem. 1910, pp. 155-163, §§ 2. 3.
(14) Cfr. G. Lauricella, loc. cit. (6), § 3.

3. Della soluzione $F_1(x)$, alla quale, nelle ipotesi sopra dette, converge in media la (9), può darsi una rappresentazione analitica, mediante la serie [15]

(13) $$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)],$$

ove

$$U_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e

(14) $$h_1, h_2, \ldots, h_\nu, \ldots$$

è una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero.

Inoltre, essendo $g(x)$ una funzione qualsivoglia, sommabile insieme col suo quadrato, la serie

(15) $$G(x) = g(x) - V_1(x) - \sum_\nu [V_{\nu+1}(x) - V_\nu(x)],$$

ove

$$V_\nu(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\, dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\, \psi_n(x)\, dx ,$$

se non è (quasi da per tutto) eguale a zero nell'intervallo (a, b), rappresenta una soluzione effettiva delle equazioni integrali

(16) $$\int_a^b \eta(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \text{ [16]} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

cioè dell'equazione

(17) $$\int_a^b K(x, y)\, \eta(y)\, dy = 0 \text{ [17]},$$

e, aggiunta alla $F_1(x)$, fornisce una nuova soluzione $F_1(x) + G(x)$ della (1).

Importa notare che la funzione $G(x)$ non dipende dalla scelta della (14), che cioè, considerando un'altra successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero,

$$h'_1, h'_2, \ldots, h'_\nu, \ldots,$$

e ponendo

$$G'(x) = g(x) - V'_1(x) - \sum_\nu [V'_{\nu+1}(x) - V'_\nu(x)],$$

ove

$$V'_\nu(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h'_\nu} \int_{x-h'_\nu}^{x+h'_\nu} \psi_n(x)\, dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\, \psi_n(x)\, dx ,$$

[15] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 5.
[16] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 9.
[17] Cfr. E. Schmidt, loc. cit. [4] § 16.

risulta:

$$G(x) = G'(x); \text{ [18]}.$$

Se $g(x)$ è essa stessa una soluzione delle equazioni integrali (16), si ha:

$$G(x) = g(x),$$

essendo allora:

$$b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, ...);$$

ed infine, se il sistema delle funzioni ortogonali (5) è chiuso, nel qual caso la (1) ammette un'unica soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, risulta sempre:

$$G(x) = 0.$$

All'equazione (1) soddisfa pertanto in ogni caso, comunque si scelga $g(x)$, la

$$F_1(x) + G(x), \tag{18}$$

ed è evidente che così si ottengono tutte le soluzioni della (1), sommabili insieme coi loro quadrati.

La (18) rappresenta dunque la *soluzione generale* della (1), e si può enunciare il seguente teorema:

Quando sono soddisfatte le condizioni occorrenti, indicate nei teoremi sopra enunciati (§§ 1, 2), *la soluzione generale dell'equazione* (1) *è rappresentata dalla serie*

$$g(x) + W_1(x) + \sum_\nu [W_{\nu+1}(x) - W_\nu(x)], \tag{19}$$

ove

$$W_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n - b_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\, dx,$$

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\, \psi_n(x)\, dx,$$

$g(x)$ essendo una funzione arbitraria, sommabile insieme col suo quadrato, ed

$$h_1, h_2, \ldots, h_\nu, \ldots$$

una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero [19].

4. La (19) si semplifica, se la serie $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$ converge (quasi da per tutto) nell'intervallo (a, b). Notevole è il seguente corollario [20]:

[18] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 5.

[19] Cfr. G. Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 12 (1908), § 6_1.

[20] Cfr. G. Lauricella, loc. cit. 19), § 4_1.

Sotto le condizioni indicate nei teoremi enunciati in principio (§§ 1, 2), *la serie* $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$, *supposta convergente (quasi da per tutto) nell'intervallo* (a, b), *rappresenta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, dell'equazione* (1); *è in particolare l'unica soluzione, se il sistema delle funzioni ortogonali* (5) *è chiuso.*

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota II di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Nel terminare la mia Nota precedente su questo argomento [1] ho accennato all'incrudimento che si verifica in un filo di rame il quale venga per la prima volta cimentato a trazione, ed al conseguente diverso comportamento che esso presenta se si ripetono, in successo di tempo, le medesime condizioni di carico.

Ho cercato allora di chiarire la natura di questo fenomeno riproducendo, a lato del diagramma che rappresenta l'andamento delle esperienze ivi descritte, un altro diagramma relativo ad alcune esperienze da me eseguite negli ultimi giorni dello scorso dicembre rinnovando identicamente sul medesimo spezzone le condizioni di carico già realizzate la prima volta nei giorni 15 e 16 del precedente febbraio. A più completa documentazione del caratteristico confronto, credo non inutile riportare ora, nella prima tabella qui allegata, i risultati così ottenuti, insieme con pochi altri i quali si riferiscono ad un ciclo di deformazione osservato facendo variare periodicamente il carico applicato allo stesso spezzone fra un massimo di 1200 ed un minimo di 200 kgr.

Tale ciclo (che si trova rappresentato, in scala maggiore di quella usata l'altra volta, nella fig. 1, insieme colle due linee di ascesa da 0 a 1200 kgr. e di discesa da 200 a 0, le quali valgono a precisarne la posizione rispetto agli assi coordinati) si è rivelato notevolmente stabile: si è potuto infatti descriverlo più volte di seguito senza che si ottenessero, da una volta all'altra, differenze sensibili nelle singole letture: non solo, ma si è potuto anche assodare che le curve di deformazione relative a variazioni cicliche della forza applicata non oltrepassanti i limiti di esso constavano di cicli alla lor volta chiusi e tutti contenuti nell'interno del primo.

Questa proprietà, che mi si è ripetutamente presentata come caratteristica dei cicli chiusi, può venire meglio precisata se messa in relazione

[1] Presentata, per la pubblicazione in questi Rendiconti, nella seduta del 1° febbraio 1914.