ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

velocità c con cui si propaga l'energia; tale di più la c che i raggi, che ne rimangono definiti in base al principio di Fermat, ammettano tangenti variabili con continuità.

Con ciò, infatti, fissato un generico punto M del mezzo, è lecito di delimitare attorno ad M un campo S così piccolo che l'emissione, la propagazione e l'assorbimento dell'energia differiscano tanto poco quanto si vuole da quello che avverrebbe in un ipotetico mezzo omogeneo nel quale $\varepsilon, \alpha, K . c$ avessero dovunque le determinazioni $\varepsilon_M, \alpha_M, K_M, c_M$, che ad esse spettano in M. Più precisamente si può dimostrare che l'energia perduta, per emissione, da S nell'unità di tempo, si presenta in definitiva sotto la forma

$$S(\varepsilon_M + \delta),$$

δ convergendo a zero con S (si intenda colla massima dimensione di S) quella acquistata, per assorbimento, sotto la forma,

$$S(K_M \alpha_M + \delta^*),$$

δ^* convergendo pure a zero colla massima dimensione di S. Eguagliando, dividendo per S, e passando poi al limite, si conclude giusta l'asserto.

Matematica. — *Della probabilità nelle prove ripetute*. Nota del Socio P. Pizzetti.

Il teorema di Bernoulli sulla frequenza media di un avvenimento in un numero indefinito di prove identiche, si dimostra di solito esprimendo, per approssimazione, con un esponenziale la probabilità elementare di ogni possibile combinazione. Ma la dimostrazione, quale è esposta nei trattati, è complicata e non rigorosa. In una Nota pubblicata nel 1908 negli Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, mostrai come si possa porre quella dimostrazione al coperto da qualsiasi obbiezione, introducendo naturalmente qualche maggiore complicazione nei calcoli.

La dimostrazione che segue è invece estremamente semplice e nulla lascia a desiderare dal lato della esattezza. Essa si deduce facilmente dalle note *diseguaglianze di Cebycef* (1), e da questo punto di vista non ha nulla di originale. Credo tuttavia utile di dare qui questa dimostrazione, sia per liberarla da talune superflue complicazioni e ridurla così alla sua più semplice forma, sia per mostrare come si possano facilmente trovare dei limiti, più prossimi di quelli dati dalle diseguaglianze di Cebycef, per la probabilità

(1) Ved. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 1912, pagg. 34 e segg.

che il risultato di un certo numero di prove ripetute sia compreso entro certi limiti.

1. Consideriamo s prove, in ciascuna delle quali l'avvenimento A abbia la probabilità p di presentarsi. Poniamo:

$$\text{(1)} \qquad P_v = \frac{s(s-1)\ldots(s-v+1)}{v\,!} p^v (1-p)^{s-v}.$$

Sarà, questa P_v, la probabilità che, in s prove, l'avvenimento A abbia a presentarsi v volte e non più. Il numero v può prendere tutti i valori interi da 0 ad s, e, se la sommatoria Σ s'intende estesa a tutti questi valori di v, si avrà evidentemente:

$$\text{(2)} \qquad \Sigma P_v = 1.$$

Derivando la (1) rispetto a p e moltiplicando per $p(1-p)$, si ha, con ovvie riduzioni:

$$\text{(3)} \qquad p(1-p)\frac{dP_v}{dp} = (v - sp) P_v.$$

Se pertanto si deriva la (2) rispetto a p e si moltiplica per $p(1-p)$, si ottiene:

$$\text{(4)} \qquad \Sigma(v - sp) P_v = 0$$

(il che vuol dire che sp è il *valor medio* o la *speranza matematica* di v).

Ripetendo sulla (4) l'operazione ora eseguita sulla (2), e tenendo conto delle (2) (3), abbiamo

$$\text{(5)} \qquad \Sigma(v - sp)^2 P_v = sp(1-p) = spq,$$

ove si ponga $q = 1 - p$. (Questo risultato si può esprimere dicendo che $\sqrt{pqs}$ è l'errore medio Gaussiano della ipotesi $v = ps$).

Indichiamo ora con ε un numero reale positivo, e chiamiamo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ quelli (se pur ve ne sono) fra i possibili valori di v, pei quali risulta

$$\text{(6)} \qquad (v - sp)^2 > \varepsilon^2 s^2.$$

Denotiamo poi con Σ' quello a cui si riduce la sommatoria Σ, quando la si estenda ai soli valori $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ della v, trascurando tutti gli altri. Poichè nel 1° membro della (5) tutti i termini sono positivi, avremo

$$\Sigma'(v - sp)^2 P_v < pqs.$$

E quindi, per la (6),

$$\varepsilon^2 s^2 . \Sigma' P_v < pqs,$$

ovvero

$$\Sigma' P_v < \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

Ora, $\Sigma' P_v$ esprime la probabilità che il numero v soddisfaccia alla diseguaglianza (6). La probabilità Π, che sia invece soddisfatta la relazione

$$(7) \qquad |v - sp|^2 \leq \varepsilon^2 s^2$$

sarà dunque

$$\Pi = 1 - \Sigma' P_v > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

La (7) può anche scriversi

$$\left| \frac{v}{s} - p \right| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo dunque una probabilità

$$(8) \qquad \Pi > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s}$$

che la differenza $p - \frac{v}{s}$ non supererà, in valor assoluto, un valor assegnato ε. Preso ε piccolo a piacere, si può immaginare il numero s delle prove tanto grande perchè Π differisca da 1 (certezza) di tanto poco quanto si vuole. Il che esprime appunto il teorema di Giacomo Bernoulli.

2. Questo modo di dimostrazione presenta, di fronte a quello ordinariamente seguìto, il difetto, che esso non fornisce la nota espressione approssimata, per mezzo dell'integrale di Poisson, della probabilità Π nel caso di un numero grande, ma finito, di prove. Ma nella mia sopracitata Nota ebbi a dimostrare come, in tutti i casi (che sono i più interessanti) in cui la Π è molto prossima ad *uno*, la approssimazione data dal detto integrale è assolutamente illusoria. D'altra parte, l'assegnare, come è fatto nel precedente paragrafo, un limite inferiore della Π, può in molti casi essere sufficiente. È poi facile, trovare altri limiti [in molti casi, più approssimati di quello fornito dalla (8)], valendosi, invece che della formola (5), delle analoghe formole che dànno il valor medio delle quarte, seste ecc. potenze della differenza $v - ps$.

Per ottenere, con una certa speditezza, i detti valori medii, osserviamo che, posto

$$M_n = \Sigma (p - sv)^n . P_v,$$

la formula (3) dà immediatamente

$$M_{n+1} = p(1-p) \left\{ \frac{dM_n}{dp} + sn M_{n-1} \right\}.$$

Questa formola dà modo di calcolare una dopo l'altra le espressioni dei valori medii M_n. Si ha, così,

$$M_3 = s(p - 3p^2 + 2p^3) = spq\,(q - p)\,,$$

$$M_4 = (3s^2 - 6s)(p^2 - 2p^3 + p^4) + s(p - p^2) = (3s^2 - 6s)\,p^2q^2 + spq\,,$$

$$M_5 = 10s^2(p^2 - 4p^3 + 5p^4 - 2p^5) + s(p - 15p^2 + 50p^3 - 60p^4 + 24p^5) = \\ = spq\,(q-p)\,\{(10s - 12)\,pq + 1\}\,,$$

$$M_6 = spq\,\{15s^2p^2q^2 + spq(25 - 130pq) + 1 - 30pq + 120p^2q^2\}, \quad \text{etc. etc.}$$

Col ragionamento del paragrafo precedente, otteniamo, facendo uso della espressione di M_4, che la probabilità Π della diseguaglianza

$$\left| p - \frac{v}{s} \right| \leq \varepsilon$$

ha un limite inferiore, dato da

$$\Pi > 1 - \frac{1}{\varepsilon^4 s^2}\left[3p^2q^2 + \frac{pq}{s}(1 - 6pq)\right]. \tag{9}$$

Valendoci della espressione di M_6, abbiamo

$$\Pi > 1 - \frac{1}{\varepsilon^6 s^3}\left[15\,p^3q^3 + \cdots\right] \tag{10}$$

dove i termini non scritti hanno a divisore s ed s^2, e sono praticamente trascurabili. Com'è chiaro, queste successive formole dànno limiti inferiori sempre più prossimi, nella ipotesi che s sia abbastanza grande. Se supponiamo $s = 10000$, $p = q = \frac{1}{2}$, $\varepsilon \frac{1}{50}$, abbiamo rispettivamente, dalle (8) (9) (10),

$$\Pi > 0{,}937\ , \quad \Pi > 0{,}988\ , \quad \Pi > 0{,}9963\,.$$

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.