ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali*. Nota del Socio Vito Volterra.

1. Sia

$$\psi(x)=\varphi(x)+\int_0^x \varphi(\xi)f_1(\xi\,,x)d\xi$$

l'equazione risolvente dell'equazione integrale

$$\varphi(x)=\psi(x)+\int_0^x \psi(\xi)f(\xi\,,x)d\xi\,.$$

Fra il nucleo dell'equazione primitiva e quello della risolvente passano le relazioni (1)

$$f(x\,.\,y)+f_1(x\,,y)=-\int_x^y f(x\,,\xi)\,f_1(\xi\,,y)d\xi=-\int_x^y f_1(x\,,\xi)\,f(\xi\,,y)d\xi\,.$$

Se il nucleo dell'equazione primitiva è della forma $f(x-\xi)$, ossia appartiene al *gruppo del ciclo chiuso* vi apparterrà anche il nucleo risolvente che avrà quindi la forma $f_1(x-\xi)$; e l'equazione precedente si scriverà:

$$\text{(I)}\qquad f(x)+f_1(x)=-\int_0^x f(\xi)f_1(x-\xi)\,d\xi=-\int_0^x f_1(\xi)f(x-\xi)d\xi\,.$$

Il prof. Tedone, in una recente Nota (2), si domanda quando il nucleo risolvente possa ottenersi dal primitivo mediante un numero finito di operazioni di derivazione e d'integrazione.

Risolviamo il problema nel caso in cui il nucleo risolvente si voglia che resulti dato da una espressione lineare a coefficienti costanti delle derivate e di integrali del nucleo primitivo; cioè:

$$\text{(1)}\qquad f_1(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\cdots+a_n f^{(n)}(x)+b_0+b_1\int_0^x f(\xi)d\xi+$$
$$+b_2\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(\eta)\,d\eta+\cdots$$

2. Facendo uso delle notazioni impiegate per la composizione (3), la (I) si scriverà:

$$\text{(2)}\qquad f+f_1=-\overset{\times}{f}\overset{\times}{f_1}$$

(1) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars 1913, pag. 67, form. (E) e (E').

(2) Rend. Acc. dei Lincei, seduta 1° febbraio 1914.

(3) Vedi le lezioni precedentemente citate, cap. IX.

ossia

$$f_1 = - \frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}}.$$

D'altra parte,

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}$$

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sia

$$f(0) = c_0 \quad , \quad f'(0) = c_1 \quad , \quad f''(0) = 2c_2 \, , \cdots , f^{(m)}(0) = m! \, c_m \, ;$$

sarà

$$f - c_0 = \overset{\times}{f'}\overset{\times}{1} \; , \; f - c_0 - c_1 x = \overset{\times}{f''}\overset{\times}{1}{}^2, \cdots , f - c_0 - c_1 x \cdots - c_m x^m = \overset{\times}{f^{(m)}}\overset{\times}{1}{}^m$$

e, facendo uso del simbolo di divisione (¹),

$$\overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\, \overset{\times}{1}{}^{-1} = f' \quad , \quad \overline{\overset{\times}{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\, \overset{\times}{1}{}^{-2} = f'' \cdots$$

$$\overline{\overset{\times}{f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}}}\, \overset{\times}{1}{}^{-m} = f^{(m)}.$$

Avremo dunque (²)

$$a_0 f + a_1 \overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\, \overset{\times}{1}{}^{-1} + a_2 \overline{\overset{\times}{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\, \overset{\times}{1}{}^{-2} + \cdots + b_0 + b_1 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1} + b_2 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^2 + \cdots$$

$$= - \frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}}.$$

Le operazioni simboliche di divisione e di moltiplicazione possono trattarsi come operazioni algebriche; quindi, riducendo a forma intera, avremo:

$$(3) \quad [a_0 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^m + a_1 \overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\, \overset{\times}{1}{}^{m-1} + \cdots + a_m (f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}) + \overset{\times}{b^0}\overset{\times}{1}{}^m$$
$$+ b_1 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^{m+1} + b_2 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^{m+2} + \cdots](1 + \overset{\times}{f}) = - \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}{}^m.$$

Questa è una equazione integrale di secondo grado della cui soluzione mi sono occupato nelle mie lezioni sulle funzioni di linee (³).

(¹) Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 16.

(²) L'uso di questo simbolo è qui intuitivo. L'ho già impiegato più in genrale nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton, che vedranno presto la luce.

(³) Per trasformare la equazione (2) nella (3) sarebbe bastato applicare m volte la integrazione alla equazione (2).

3. Come esempio, risolviamo il problema di *trovare un nucleo tale che il nucleo risolvente sia la derivata del primitivo*, cioè si abbia

$$f + f' = -\overset{\times\times}{f f'},$$

ossia

$$f' = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}.$$

Ma

$$f' = \overset{\times}{\overline{(f-c_0)}}\,\overset{\times}{1}^{-1}$$

quindi

$$\overset{\times}{\overline{(f-c_0)}}\,\overset{\times}{1}^{-1} = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}$$

e, riducendo a forma intera,

$$\overset{\times}{\overline{(f-c_0)}}\,(1+\overset{\times}{f}) = -\overset{\times\times}{f1}.$$

Questa equazione integrale si scrive, supponendo $c_0 = 1$ per trattare il caso più semplice,

$$\overset{\times}{f^2} + f - 1 = 0.$$

Per risolverla, basta considerare l'equazione algebrica (¹)

$$y^2 + y - z = 0,$$

da cui segue

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4z}}{2}.$$

Prendiamo la radice che si annulla per $z = 0$ e sviluppiamola in serie di potenze di z. Si otterrà

$$y = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}\, \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\, z^n.$$

Sostituiamo, al posto di z, $\overset{\times}{1}$ e consideriamone le potenze simboliche come composizioni, cioè

$$\overset{\times}{1}{}^2 = x \quad , \quad \overset{\times}{1}{}^3 = \frac{x^2}{2!}, \ldots, \overset{\times}{1}{}^n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

(¹) Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 13.

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!\,(n-1)!} x^{n-1}.$$

Questa funzione resulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione f doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Colle questioni che concernono il rotolamento di una superficie sopra un'altra applicabile, si collegano varie specie di problemi, ove ogni volta si tratta di determinare tutte le coppie di superficie applicabili che soddisfano a certe condizioni geometriche. In due Note, recentemente inserite in questi Rendiconti [1], mi sono occupato dei problemi più direttamente attinenti alla teoria del rotolamento; nella presente mi propongo di risolvere un problema affine, che conduce ad una classe di superficie strettamente connesse colle deformate delle quadriche di rotazione e coi teoremi di Guichard.

A) *Trovare tutte le coppie di superficie applicabili* Σ, $\overline{\Sigma}$, *per le quali le distanze di un punto fisso* O *dello spazio da ogni coppia* (P, $\overline{\mathrm{P}}$) *di punti corrispondenti nell'applicabilità hanno un rapporto costante n.*

Formeremo subito un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, della quale sono integrali le superficie cercate, procedendo nel modo seguente. Indichiamo con

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \tag{1}$$

la prima forma fondamentale comune a Σ, $\overline{\Sigma}$, e con 2ϱ, $2\overline{\varrho}$ rispettivamente i quadrati delle distanze dell'origine O da due punti corrispondenti $\mathrm{P} \equiv (u, v)$, $\overline{\mathrm{P}} \equiv (u, v)$; avremo, per ipotesi,

$$\overline{\varrho} = n^2 \varrho. \tag{2}$$

[1] Vedi i fascicoli del 4 gennaio e del 1° febbraio 1914.