ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!\,(n-1)!} x^{n-1}.$$

Questa funzione resulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione f doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Colle questioni che concernono il rotolamento di una superficie sopra un'altra applicabile, si collegano varie specie di problemi, ove ogni volta si tratta di determinare tutte le coppie di superficie applicabili che soddisfano a certe condizioni geometriche. In due Note, recentemente inserite in questi Rendiconti [1], mi sono occupato dei problemi più direttamente attinenti alla teoria del rotolamento; nella presente mi propongo di risolvere un problema affine, che conduce ad una classe di superficie strettamente connesse colle deformate delle quadriche di rotazione e coi teoremi di Guichard.

A) *Trovare tutte le coppie di superficie applicabili* Σ, $\overline{\Sigma}$, *per le quali le distanze di un punto fisso* O *dello spazio da ogni coppia* (P, $\overline{\mathrm{P}}$) *di punti corrispondenti nell'applicabilità hanno un rapporto costante* n.

Formeremo subito un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, della quale sono integrali le superficie cercate, procedendo nel modo seguente. Indichiamo con

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

la prima forma fondamentale comune a Σ, $\overline{\Sigma}$, e con 2ϱ, $2\overline{\varrho}$ rispettivamente i quadrati delle distanze dell'origine O da due punti corrispondenti $\mathrm{P} \equiv (u, v)$, $\overline{\mathrm{P}} \equiv (u, v)$; avremo, per ipotesi,

$$(2) \qquad \overline{\varrho} = n^2 \varrho.$$

[1] Vedi i fascicoli del 4 gennaio e del 1° febbraio 1914.

con n costante, intendendo per altro escluso il caso $n^2 = 1$, ove, come è ben noto, le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ sarebbero congruenti.

Ora sappiamo che ϱ soddisfa all'*equazione dell'applicabilità* [1]:

$$\Delta_2\varrho - \Delta_{22}\varrho = 1 + \mathrm{K}(\Delta_1\varrho - 2\varrho), \tag{3}$$

dove i parametri differenziali e la curvatura K si riferiscono alla forma differenziale (1).

Scrivendo che $\overline{\varrho}$ soddisfa, alla sua volta, alla medesima (3), abbiamo

$$n^2\Delta_2\varrho - n^4\Delta_{22}\varrho = 1 + \mathrm{K}(n^4\Delta_1\varrho - 2n^2\varrho),$$

ed eliminando, colla (3), il $\Delta_{22}\varrho$, col sopprimere il fattore non nullo $1 - n^2$, resta l'equazione equivalente

$$n^2\Delta_2\varrho = 1 + n^2 - 2\varrho\, n^2\mathrm{K}. \tag{3*}$$

Questa esprime la condizione *necessaria e sufficiente* cui deve soddisfare la superficie Σ, perchè esista una sua deformata $\overline{\Sigma}$ nelle condizioni del problema.

Ora se, adottando le notazioni usate da Weingarten nelle sue ultime ricerche sulla teoria dell'applicabilità, poniamo

$$2\varrho = 2q\,,$$

e indichiamo con p la distanza algebrica dell'origine O dal piano tangente a Σ nel punto (u, v), con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di Σ, abbiamo (*Lezioni*, loc. cit.)

$$\Delta_2\varrho = 2 - p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\quad,\quad \mathrm{K} = \frac{1}{r_1 r_2}\,, \tag{4}$$

onde la (3*) si traduce nell'equazione finale

$$\frac{1-n^2}{n^2}\, r_1 r_2 + p(r_1 + r_2) - 2q = 0\,. \tag{I}$$

Dunque: *Le superficie Σ domandate sono tutte e sole le superficie integrali della equazione del secondo ordine* (I).

Questa ha precisamente la forma d'Ampère, considerata nelle citate ricerche di Weingarten, e corrisponde a porre

$$\varphi = \sqrt{p^2 + \frac{n^2}{1-n^2}\cdot 2q}\,;$$

la classe di superficie applicabili che ne deriva col metodo di Weingarten è quella delle deformate delle quadriche di rotazione (a centro).

[1] Vedi le mie *Lezioni*, vol. I, § 69.

Non lascieremo di osservare che le superficie Σ così caratterizzate corrispondono anche, secondo il teorema di Malus, ad un problema di ottica. Supponiamo che i raggi emananti dal punto O si rifrangano attraversando Σ, secondo l'indice n di rifrazione; e si immaginino i raggi rifratti invariabilmente legati alla Σ nelle sue deformazioni. *Quando Σ si applica sulla $\overline{\Sigma}$, i raggi rifratti si concentrano nuovamente in un punto* O', *ed è costante* $= n$ *il rapporto dei segmenti* $\frac{\mathrm{O'P}}{\mathrm{OP}}$, *al variare di* P.

2. Abbiasi una superficie Σ integrale della (I), e quindi una sua deformata $\overline{\Sigma}$: e siano

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2$$
$$\overline{\mathrm{D}}\,du^2 + 2\overline{\mathrm{D}}'\,du\,dv + \overline{\mathrm{D}}''\,dv^2$$

le due rispettive loro *seconde* forme fondamentali. Dalle formole delle *Lezioni* (§ 69), indicando con $\varrho_{11}, \varrho_{12}, \varrho_{22}$ le derivate seconde covarianti di ϱ, abbiamo

$$(5)\qquad \mathrm{D} = \frac{\varrho_{11} - \mathrm{E}}{\sqrt{2\varrho - \varDelta_1\varrho}}\,,\quad \mathrm{D}' = \frac{\varrho_{12} - \mathrm{F}}{\sqrt{2\varrho - \varDelta_1\varrho}}\,,\quad \mathrm{D}'' = \frac{\varrho_{22} - \mathrm{G}}{\sqrt{2\varrho - \varDelta_1\varrho}}\,,$$

e le analoghe per $\overline{\Sigma}$

$$(5^*)\qquad \overline{\mathrm{D}} = \frac{n^2\varrho_{11} - \mathrm{E}}{n\sqrt{2\varrho - n^2\varDelta_1\varrho}}\,,\quad \overline{\mathrm{D}}' = \frac{n^2\varrho_{12} - \mathrm{F}}{n\sqrt{2\varrho - n^2\varDelta_1\varrho}}\,,\quad \overline{\mathrm{D}}'' = \frac{n^2\varrho_{22} - \mathrm{G}}{n\sqrt{2\varrho - n^2\varDelta_1\varrho}}\,.$$

In riguardo per altro alla realità di questa deformata $\overline{\Sigma}$, è da osservarsi che deve risultare positiva la quantità sotto il segno radicale nelle (5*), cioè

$$n^2 p^2 + (1 - n^2)\, 2q.$$

Questo ha sempre luogo per $n^2 < 1$, mentre per $n^2 > 1$ una regione soltanto di Σ troverà una corrispondente reale sopra $\overline{\Sigma}$.

Dalle (5) (5*) segue che

$$\overline{\mathrm{D}}\,du^2 + 2\,\overline{\mathrm{D}}'\,du\,dv + \overline{\mathrm{D}}''\,dv^2$$

è una combinazione lineare delle due forme fondamentali di Σ, cioè

$$\overline{\mathrm{D}}\,du^2 + 2\overline{\mathrm{D}}'\,du\,dv + \overline{\mathrm{D}}''\,dv^2 = \alpha(\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2) + \\ + \beta(\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2)\,,$$

ove

$$\alpha = \frac{n^2 - 1}{n\sqrt{2\varrho - n^2\varDelta_1\varrho}}\,,\quad \beta = n\,\frac{\sqrt{2\varrho - \varDelta_1\varrho}}{\sqrt{2\varrho - n^2\varDelta_1\varrho}}\,.$$

Ne segue che l'equazione differenziale delle linee di curvatura,

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,dv + D''\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

è la medesima per Σ, $\overline{\Sigma}$; cioè: *Sulle due superficie applicabili Σ, $\overline{\Sigma}$ si corrispondono le linee di curvatura.*

La circostanza ora osservata e noti teoremi generali (*Lezioni*, vol. II, § 240 e § 393) dimostrano che sussiste la proprietà seguente:

Le due superficie applicabili Σ, $\overline{\Sigma}$ hanno rispettivamente a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura con due superficie a curvatura costante positiva, trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra.

3. Le coppie di superficie applicabili Σ, $\overline{\Sigma}$ si sono già presentate nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard per le deformate delle quadriche di rotazione [1], e le formole che risultano da questa teoria saranno invocate più oltre per provare l'esistenza di *famiglie di Lamé* composte di superficie integrali della (I).

Qui aggiungiamo alcune altre osservazioni, dalle quali risulterà meglio il legame fra le attuali superficie Σ e le deformate delle quadriche di rotazione. In primo luogo dimostriamo: *L'inversione per raggi vettori reciproci col centro nel punto O cangia ogni superficie Σ integrale della* (I) *in un'altra superficie integrale Σ'.*

E infatti, se indichiamo cogli accenti le quantità relative a Σ', valgono in generale le formole

$$\left\{\begin{aligned} & 2q' = \frac{1}{2q}\quad , \quad p' = -\frac{p}{2q} \\ & \frac{1}{r_1'} = \frac{2q}{r_1} - p\quad , \quad \frac{1}{r_2'} = \frac{2q}{r_2} - p\,, \end{aligned}\right.$$

colle quali la (I) si trasforma in sè stessa.

Due tali superficie Σ, Σ', integrali della (I) ed inverse l'una dall'altra, hanno rispettivamente a comune l'immagine sferica delle loro linee di curvatura con due superficie S, S' colla (medesima) curvatura media costante. Ora si ha che: *Le superficie a curvatura media costante* S, S' *possono collocarsi nello spazio in guisa da formare le due falde di un inviluppo di sfere di Guichard, coi centri distribuiti sopra una deformata Φ di una quadrica rotonda, i raggi delle sfere eguagliando la distanza del centro da un fuoco principale quando Φ si applica sulla quadrica* [2].

[1] Cfr. particolarmente i §§ 24, 25 della mia Memoria *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante.* Annali di matematica, serie 3ª, tomo III.

[2] Si noti che questa quadrica è un ellissoide allungato se $n^2 > 1$; è un iperboloide a due falde, quando $n^2 < 1$.

Inoltre, se con P, P′ indichiamo due punti qualunque corrispondenti di Σ, Σ' (allineati con O), la retta OPP′ è parallela alla congiungente i due punti corrispondenti di S, S′, cioè alla normale alla deformata Φ della quadrica rotonda.

Dopo ciò, se supponiamo data Φ, e quindi le due superficie S, S′ a curvatura media costante, ovvero le loro due parallele a curvatura costante positiva, le superficie Σ, Σ' sono perfettamente determinate (ciascuna a meno di un'omotetia) dalla costruzione seguente:

Dal centro O *si conduca la parallela alla normale generica di* Φ *e se ne stacchi un tale segmento* $\mathrm{OP} = \mathrm{R}$ *che la superficie* Σ, *luogo di* P, *abbia la normale parallela a quella di* S *nel punto* M *corrispondente, ciò che determina (per quadrature)* R *a meno di un fattor costante. La superficie* Σ *così ottenuta è un integrale della* (I); *e la sua reciproca* Σ', *ottenuta staccando il segmento inverso* $\mathrm{OP}' = \frac{1}{\mathrm{R}}$, *ha le normali parallele alle corrispondenti di* S′.

Si vede adunque che le trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva, date dalla inversione dei teoremi di Guichard (Mem. cit.), acquistano il più semplice significato per le superficie Σ integrali della (I), venendo a coincidere colla inversione per raggi vettori reciproci.

Un'altra osservazione importante è la seguente: Si sa che sulla deformata Φ della quadrica rotonda Q alle linee di curvatura di (S, S′), (Σ, Σ') corrispondono le linee del *sistema coniugato permanente*, cioè di quel sistema coniugato di Φ che si conserva coniugato sulla quadrica Q. Ne risulta il teorema:

Le projezioni sferiche delle linee di curvatura di una superficie Σ *integrale della* (I), *fatte dall'origine* O *sopra una sfera col centro in* O, *sono le immagini di Gauss del sistema coniugato permanente per una deformata* Φ *della quadrica rotonda.*

4. Dalle deformate delle quadriche rotonde *a centro* passiamo a quelle del paraboloide rotondo, sostituendo al problema A) del n. 1, che concerne deformazioni finite, un problema analogo per deformazioni *infinitesime*:

A*) *Trovare le superficie* Σ *che ammettono una deformazione infinitesima, per la quale le distanze di un punto fisso* O *nello spazio dai punti di* Σ *vengono alterate in un rapporto costante (infinitamente prossimo all'unità).*

Indicando con $\delta\varrho$ la variazione di ϱ, avremo

$$\delta\varrho = \varepsilon\varrho\,,$$

con ε costante infinitesima. Ne seguono le formole

$$\delta\Delta_1\varrho = 2\varepsilon\Delta_1\varrho$$
$$\delta\varrho_{11} = \varepsilon\varrho_{11}\quad,\quad \delta\varrho_{12} = \varepsilon\varrho_{12}\quad,\quad \delta\varrho_{22} = \varepsilon\varrho_{22}$$
$$\delta\Delta_2\varrho = \varepsilon\Delta_2\varrho\quad,\quad \delta\Delta_{22}\varrho = 2\varepsilon\Delta_{22}\varrho$$

Variando la (3) n. 1, ne risulta, quale condizione necessaria e sufficiente,

$$\Delta_2\varrho - 2\Delta_{22}\varrho = \mathrm{K}(2\,\Delta_1\varrho - 2\varrho)\,,$$

ovvero, combinando colla (3), l'equazione equivalente

$$\Delta_2\varrho = 2 - \mathrm{K}\,.\,2\varrho\,.$$

Questa, ricorrendo alle (4), si scrive sotto la forma

$$(\mathrm{I}^*)\qquad r_1 + r_2 = \frac{2q}{p}\,,$$

che corrisponde a fare, nella (I), $n^2 = 1$ (o, propriamente, $n^2 = 1 + \varepsilon$).

Vediamo adunque che: *Le superficie Σ con deformazioni infinitesime della specie richiesta sono tutte e sole le superficie integrali della* (I*).

In queste deformazioni infinitesime le linee di curvatura si conservano, come si rileva sia dal considerare questo come un caso limite delle deformazioni finite ai nn. 1 e 2, sia dal calcolare la *variazione* della seconda forma fondamentale di Σ, che si compone linearmente colle due forme fondamentali. Da un noto teorema di Weingarten (¹) segue, allora, che le attuali superficie Σ hanno per immagine sferica delle loro linee di curvatura un sistema isotermo, ossia hanno a comune *con una superficie d'area minima* l'immagine sferica delle linee di curvatura.

Tutte le proprietà che abbiamo descritte nei numeri precedenti per le superficie Σ integrali della (I), valgono ancora per le superficie integrali della (I*); ma soltanto le superficie a curvatura media costante S, S' sono da sostituirsi, nel caso attuale, con superficie d'area minima: e la quadrica rotonda a centro diventa ora il *paraboloide rotondo*.

5. Delle proprietà che abbiamo riconosciuto nelle superficie integrali della (I) e della (I*), la maggior parte è già contenuta nei miei citati lavori del 1899. Qui vogliamo stabilire l'altra, notevole:

Esistono famiglie di Lamé (*appartenenti a sistemi tripli ortogonali*) *costituite da superficie Σ integrali della* (I) *e della* (I*); *in queste si può dare ad arbitrio una particolare superficie Σ ed una delle curve traiettorie ortogonali della famiglia.*.

Trattando nel presente n.° il caso della equazione (I), dimostreremo che le nuove famiglie di Lamé si ottengono applicando convenientemente la *trasformazione di Combescure* alle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva. Questa curvatura potrebbe anche supporsi variabile da superficie a superficie, arrivando al medesimo risultato; ma qui, per abbreviare, considereremo solo il caso che la curvatura sia la stessa per tutte, e la porremo $= +1$.

(¹) Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 227.

Un tale sistema triplo ortogonale (u, v, w), ossia un sistema di Weingarten, è definito dalla forma

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 \tag{6}$$

dell'elemento lineare dello spazio, soddisfacendo θ al sistema caratteristico di equazioni a derivate parziali (¹):

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = -\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right) = \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right.$$

Indicando ora con c una costante arbitraria, tale, però, che sia

$$c\,(c+1) > 0,$$

denotiamo con

$$\Phi\,,\ \varLambda\,,\ \mathrm{M}\,,\ \mathrm{W}$$

una quaderna di funzioni incognite di u, v, w, assoggettate a soddisfare al seguente sistema differenziale, lineare ed omogeneo:

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\,.\,\varLambda\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \cosh\theta\,.\,\mathrm{M}\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial w} = \frac{\partial\theta}{\partial w}\,.\,\mathrm{W}\\
&\frac{\partial\varLambda}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\mathrm{M} + c\operatorname{senh}\theta\,.\,\Phi - (c+1)\cosh\theta\,.\,\mathrm{W}\,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial\varLambda}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\mathrm{M}\,,\quad \frac{\partial\varLambda}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\,.\,\mathrm{W}\,;\\
&\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\varLambda\,,\quad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\varLambda\,. + c\cosh\theta\,.\,\Phi - (c+1)\operatorname{senh}\theta\,.\,\mathrm{W}\,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial w} = \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{W}\,;\\
&\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial u} = \cosh\theta\,.\,\varLambda\,,\quad \frac{\partial\mathrm{W}}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\,.\,\mathrm{M}\,,\\
&\qquad (c+1)\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial w} = c\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\varLambda - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{M}\,.
\end{aligned}\right.$$

(¹) *Lezioni*, vol. II, § 431.

In forza delle (a), questo è un sistema *illimitatamente integrabile*, onde possono scegliersi ad arbitrio i valori iniziali di Φ, Λ, M, W per un sistema di valori iniziali di u, v, w. Il sistema (A) possiede inoltre l'integrale quadratico

$$\Lambda^2 + M^2 - C\Phi^2 + (C+1)W^2 = \text{cost};$$

e noi intendiamo scelti i valori iniziali di Φ, Λ, M, W per modo che *la costante del secondo membro sia nulla*; sarà dunque, identicamente,

$$\Lambda^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1)W^2 = 0. \tag{7}$$

Dopo ciò, nella quaderna integrale (Φ, Λ, M, W) resteranno, a prescindere da una costante moltiplicativa, *due costanti arbitrarie*.

6. Ciò premesso, supposta scelta una quaderna integrale (Φ, Λ, M, W) di (A), e indicando con ξ, η, ζ le coordinate di un punto nello spazio, poniamo

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \Lambda X_1 + MX_2 + WX_3 \\ \eta &= \Lambda Y_1 + MY_2 + WY_3 \\ \zeta &= \Lambda Z_1 + MZ_2 + WZ_3, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dove $(X_1\, Y_1\, Z_1)$, $(X_2\, Y_2\, Z_2)$, $X_3\, Y_3\, Z_3)$ denotano i coseni delle tre direzioni principali nel sistema triplo ortogonale (6) di Weingarten.

Dimostreremo che: *le formole* (8) *definiscono un sistema triplo ortogonale [trasformato di Combescure del sistema* (6) *di Weingarten], nel quale la famiglia $w = cost$ è formata di superficie Σ integrali della* (I) *con* $c = \dfrac{n^2}{1-n^2}$.

Derivando le (8), coll'aver riguardo alle (A) ed alle formole per le derivate dei coseni, si trova

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= c(\operatorname{senh}\theta\, \Phi - \cosh\theta\, .\, W)\, .\, X_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= c(\cosh\theta\, \Phi - \operatorname{senh}\theta\, W)\, X_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= c\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\Phi - \frac{\partial W}{\partial w}\right).\, X_3\, . \end{aligned}\right.$$

colle analoghe per η, ζ; ne segue

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = c^2 \left\{ (\operatorname{senh}\theta\, \Phi - \cosh\theta\, W)^2\, du^2 + \right.$$
$$\left. + (\cosh\theta\, \Phi - \operatorname{senh}\theta\, W)^2\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi - \frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 dw^2 \right\}.$$

Queste formole pongono in evidenza appunto che le (8) definiscono un sistema triplo ortogonale, trasformato di Combescure del sistema (6) di Weingarten.

Ma di più, se calcoliamo i raggi principali $\varrho_1 \, \varrho_2$ di curvatura delle superficie $w = \text{cost}$ nel nuovo sistema, troviamo

$$\varrho_1 = c\,(\coth \theta\Phi - \mathrm{W}) \;,\; \varrho_2 = c\,(\operatorname{tgh} \theta\Phi - \mathrm{W}) ,$$

e, quindi,

$$\varrho_1 \varrho_2 + c\mathrm{W}\,(\varrho_1 + \varrho_2) = c^2\,(\Phi^2 - \mathrm{W}^2) ,$$

ossia, per la (7),

$$\varrho_1 \varrho_2 + c\mathrm{W}\,(\varrho_1 + \varrho_2) - c\,(\Lambda^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2) = 0 .$$

Ma, dalle (8), abbiamo

$$p = \Sigma \xi \, \mathrm{X}_3 = \mathrm{W} \;,\; 2q = \Sigma \xi^2 = \Lambda^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 ,$$

e la precedente si scrive quindi,

$$\varrho_1 \varrho_2 + cp\,(\varrho_1 + \varrho_2) - c \,.\, 2q = 0 ,$$

che combina colla (I) ove si faccia

$$c = \frac{n^2}{1 - n^2} .$$

Così è provato quanto si voleva; e, di più, dalla arbitrarietà sussistente nei sistemi di Weingarten, facilmente si deduce che una superficie Σ della famiglia $w = \text{cost}$ può scegliersi ad arbitrio, e così pure può ad arbitrio prescriversi una delle curve (w) trajettorie ortogonali.

È manifesto poi dal n.° 3 che da un tale sistema triplo ortogonale (Σ) se ne deduce subito un secondo (Σ') con una inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine. I due sistemi di Weingarten aventi a comune le immagini sferiche con (Σ), (Σ'), sono dedotti l'uno dall'altro con una delle trasformazioni *reali*, studiate nella citata Memoria, che si compongono di due trasformazioni di Bäcklund coniugate immaginarie.

7. Da ultimo vogliamo provare che anche con superficie Σ integrali della (I*) si possono comporre famiglie di Lamé, e col medesimo grado di generalità.

Qui otterremo lo scopo, *in modo molto più semplice*, partendo da una famiglia di sfere di raggio costante $= 1$. Consideriamo adunque una sfera mobile (di raggio $= 1$), il cui centro percorra una curva arbitraria dello spazio; e indichiamo con w un parametro che fissa la posizione del centro sulla curva. Sopra una delle sfere segniamo, arbitrariamente, un sistema doppio di linee (u, v) ortogonale ed isotermo. Si sa che le trajettorie ortogonali delle sfere segneranno corrispondentemente su ciascuna sfera $w = \text{cost}$ un sistema ortogonale isotermo (u, v) [1]. All'elemento lineare dello spazio, riferito a questo sistema triplo ortogonale (u, v, w), in cui le $w = \text{cost}$ sono sfere, si può dare la forma caratteristica

$$ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2) + dw^2\,, \tag{9}$$

dove θ dovrà soddisfare alle corrispondenti equazioni di Lamé:

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{-\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w} + e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = -e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{-\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w} + e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right.$$

L'integrazione di questo sistema è, per quanto precede, geometricamente immediata.

Scriviamo ancora le formole che valgono per le derivate dei coseni delle direzioni principali.

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}X_2 + e^{-\theta}X_3\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}X_2\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1\,,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}X_1 + e^{-\theta}X_3\,,\quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -e^{-\theta}X_1\,,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta}X_2\,,\\
&\frac{\partial X_3}{\partial w} = e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_1 - e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_3\,.
\end{aligned}\right.$$

Indicando con m una costante arbitraria non nulla [parametro del paraboloide rotondo associato alle superficie Σ integrali della (I*)], consideriamo ora il sistema lineare seguente nella quaderna

$$(\Phi\,, \varLambda\,, \mathrm{M}\,, \mathrm{W})$$

[1] La corrispondenza segnata sulle sfere dalle loro trajettorie ortogonali è una rappresentazione conforme: precisamente un'affinità circolare di Moebius (*Lezioni*, vol. I, § 22).

di funzioni incognite:

$$
(\mathrm{B})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} = - e^{\theta} \boldsymbol{\Lambda} \;,\quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} = e^{\theta} \mathrm{M} \;,\\
&\qquad m \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial w} = m \frac{\partial \theta}{\partial w} \boldsymbol{\Phi} + e^{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} \boldsymbol{\Lambda} + e^{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} \mathrm{M} - \frac{\partial \theta}{\partial w} \mathrm{W}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial u} = - m e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \mathrm{M} + (e^{-\theta} - m e^{\theta}) \mathrm{W} \;,\quad \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial v} = - \frac{\partial \theta}{\partial u} \mathrm{M} \;,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial w} = e^{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} \mathrm{W}\\
&\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = - \frac{\partial \theta}{\partial v} \boldsymbol{\Lambda} \;,\quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = - m e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \boldsymbol{\Lambda} + (e^{-\theta} + m e^{\theta}) \mathrm{W} \;,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial w} = e^{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w} \mathrm{W}\\
&\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u} = - e^{-\theta} \boldsymbol{\Lambda} \;,\quad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v} = - e^{-\theta} \mathrm{M} \;,\quad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial w} = - \frac{\partial \theta}{\partial w} \mathrm{W} \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Questo è nuovamente, a causa delle (b), un sistema completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 - 2m\, \boldsymbol{\Phi} \mathrm{W} = \text{cost.}$$

Pensiamo ancora scelti i valori iniziali $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, M, W per modo che la costante del secondo membro si annulli, e si abbia quindi, identicamente,

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 = 2m\, \boldsymbol{\Phi} \mathrm{W}. \tag{11}$$

Poniamo nuovamente, come in (8),

$$\xi = \boldsymbol{\Lambda} \mathrm{X}_1 + \mathrm{M} \mathrm{X}_2 + \mathrm{W} \mathrm{X}_3 \,, \text{ ecc.} \tag{12}$$

e dimostriamo che queste formole ci daranno il sistema triplo ortogonale domandato. Derivando, coll'osservare le (6) e le (10), troviamo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = - m (e^{\theta} \mathrm{W} + e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi}) \mathrm{X}_1 \;,\quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = m (e^{\theta} \mathrm{W} - e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi}) \mathrm{X}_2 \,,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = m \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial w} \boldsymbol{\Phi} \right) . \mathrm{X}_3 \,,$$

e le analoghe, da cui

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = m^2 \Big\{ (e^{\theta} \mathrm{W} + e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi})^2 du^2 + (e^{\theta} \mathrm{W} - e^{-\theta} \boldsymbol{\Phi})^2 dv^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial w} \boldsymbol{\Phi} \right)^2 dw^2 \Big\} ,$$

formola che pone in evidenza il sistema triplo ortogonale.

Inoltre i raggi principali di curvatura ϱ_1, ϱ_2 delle $w = \text{cost}$ sono dati da

$$\varrho_1 = m\,(\Phi - e^{2\theta}\,\mathrm{W})\,,\ \varrho_2 = m\,(\Phi + e^{2\theta}\,\mathrm{W})\,,$$

onde risulta

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2m\Phi.$$

Ma, a causa delle (11), (12), abbiamo

$$2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \Lambda^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 = 2m\Phi\mathrm{W}$$
$$p = \xi\mathrm{X}_3 + \eta\mathrm{Y}_3 + \zeta\mathrm{Z}_3 = \mathrm{W}$$

e la precedente si scrive quindi

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2q}{p}\,.$$

Dunque la famiglia di Lamé $w = \text{cost}$ è costituita di superficie Σ integrali della (I*), come si era asserito.

Geologia. — *Su una nota di Steinmann intorno ai Diaspri di Prato in Toscana.* Nota del Socio C. De Stefani.

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota I del Socio Carlo Somigliana.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.