ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica.* Nota del Corrisp. EMILIO ALMANSI.

1. In un liquido omogeneo, indefinito (praticamente abbastanza esteso in tutte le direzioni), si abbia un numero qualunque di corpi $C, C', C'', \ldots$, i quali subiscano rapide variazioni di forma, od anche solo di posizione, tali che il fenomeno presenti. nel suo insieme, un periodo θ piccolissimo.

Quando siano verificate certe condizioni che accenno più avanti, avviene che, per ogni corpo, la forza risultante delle pressioni che il liquido esercita sugli elementi della sua superficie ha, in un intervallo di tempo multiplo di θ, un valor medio corrispondente all'attrazione che su quel corpo eserciterebbero gli altri, se i corpi del sistema possedessero certe masse m, m', m'', ..., le quali si attraessero secondo la legge di Newton.

Questo interessante fenomeno, ed altri analoghi, furono per la prima volta studiati, in casi particolari, sia dal lato matematico, sia sperimentalmente, dal prof. C. A. Bjerknes. L'argomento è stato poi ripreso, ed ampiamente svolto in un suo corso di lezioni, dal figlio prof. V. Bjerknes [1].

I procedimenti analitici da me seguiti in altra Nota [2], permettono di arrivare al risultato nel modo più semplice e generale.

2. Supporremo che nel movimento indotto nel liquido la velocità sia ovunque continua, derivi da un potenziale φ, e si annulli all'infinito; che i pesi delle particelle liquide siano trascurabili; che la densità sia uguale ad 1.

Denotiamo con (F) la forza che al tempo t agisce sopra un corpo C del sistema. Essa può decomporsi (Nota preced.) in due forze (F_0) ed (F). Le proiezioni X_0, Y_0, Z_0 sopra gli assi coordinati della forza (F_0) sono derivate esatte rispetto al tempo di funzioni periodiche col periodo θ: onde il valore medio (in un intervallo multiplo di θ) della forza stessa — vale a dire la forza che ha per proiezioni i valori medii di X_0, Y_0, Z_0 — è nullo. Noi trascureremo questa forza (F_0).

Le proiezioni della forza (F) sono

$$X = \int_\sigma \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} \alpha - \right.$$
$$\left. - \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] d\sigma ,$$

(1) *Fields of force,* Columbia University Press. New-York, 1906. Vedasi anche la Memoria di W. Voigt, *Beiträge zur Hidrodynamik,* Gött. Nachr., 1891.

(2) *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida,* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, dicembre 1913.

ecc., rappresentando σ la superficie del corpo, ed α, β, γ i coseni della normale esterna [1].

Il potenziale di velocità φ presenta, in ogni istante, tutti i caratteri del potenziale newtoniano di masse μ, μ', μ'', ... distribuite negli spazî S, S', S'', ... occupati dai corpi. Infinite distribuzioni dànno luogo, nello spazio esterno, allo stesso potenziale φ: noi supporremo di fissarne una. Verremo così a definire la funzione φ anche negli spazî S, S', S'', ... Supporremo che essa risulti, in ciascuno di questi spazî, finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde. Attraversando le superficie dei corpi, la funzione φ e le sue derivate prime non dovranno subire discontinuità. La densità ϱ relativa a questa distribuzione di masse ideali sarà:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}.$$

Ciò posto, trasformiamo, nella espressione di X, l'integrale esteso a σ in un integrale esteso allo spazio S limitato da σ. Otterremo:

$$X = -\int_S \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dS\,.$$

Poniamo

$$X_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad Y_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\quad Z_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,$$

e teniamo conto della espressione di ϱ. Avremo:

$$X = 4\pi\int_S X_1\,\varrho\,dS\,,$$

e, analogamente,

$$Y = 4\pi\int_S Y_1\,\varrho\,dS\,,\quad Z = 4\pi\int_S Z_1\,\varrho\,dS\,.$$

Queste formule possiamo interpretarle dicendo che *la forza* (F) *relativa al corpo* C *è, in ogni istante, quella stessa che si avrebbe se le masse* $\varrho\,dS$ *si attraessero secondo la legge di Newton, e la costante dell'attrazione fosse uguale a* 4π.

Parimente si potrebbe dimostrare che i momenti rispetto agli assi coordinati delle pressioni esercitate dal liquido sugli elementi di σ sono uguali ai momenti delle forze $4\pi X_1\,\varrho\,dS$, ecc.

3. Supponiamo, ora, che le mutue distanze fra i corpi C, C′, C″, ... siano grandissime rispetto alle loro dimensioni lineari. Denoti P un punto

(1) Nella Nota preced. le X ed X_0 di questa Nota sono chiamate X_1 ed X_2; la quantità sotto il segno d'integrazione nella espressione di X (X_1) è denotata con $-H$. La espressione di H è data a pag. 537.

fisso, che si trovi costantemente nello spazio S occupato da C. Così per gli altri corpi C', C'', ..., consideriamo i punti fissi P', P'', ...

Nelle formule precedenti noi possiamo ritenere che X_1, Y_1, Z_1 siano le derivate del potenziale φ_1 dovuto alle sole masse esterne μ', μ'', ... (la resultante delle mutue azioni che si esercitano tra le masse elementari $\varrho\, d\mathrm{S}$ di uno stesso corpo essendo identicamente nulla). Invece di X_1, Y_1, Z_1 scriviamo $X_1 + \delta X_1$, $Y_1 + \delta Y_1$, $Z_1 + \delta Z_1$, intendendo ora che X_1, Y_1, Z_1 siano le derivate, nel punto P, del potenziale φ_1 calcolato come se le masse μ', μ'', ... fossero concentrate nei punti P', P'', ... Ponendo

$$\delta X = 4\pi \int_S \delta X_1\, \varrho\, d\mathrm{S}\,,\ \text{ecc.},$$

avremo: $X = 4\pi X_1 \mu + \delta X$, ecc. Ammettiamo che la forza di componenti X, δY, δZ sia trascurabile rispetto alla forza di componenti $4\pi X_1\mu$, $4\pi Y_1\mu$, $4\pi Z_1\mu$ (ciò che potrà non avvenire; per es., se $\mu = 0$). Potremo allora ritenere $X = 4\pi X_1 \mu$, ecc. Onde, detta r la distanza costante PP', e posto

$$f = 4\pi \frac{\mu\mu'}{r^2}\,,$$

la forza (F) risulterà, in ogni istante, dall'attrazione (f) dovuta al corpo C', e delle altre analoghe dovute agli altri corpi.

Le masse μ, μ', ... si possono esprimere molto semplicemente mediante i volumi S, S', ... dei corpi corrispondenti. Si ha infatti:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma\,.$$

E poichè $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ è uguale alla componente, secondo la normale esterna, della velocità di un punto di σ, se diciamo ora $d\mathrm{S}$ l'incremento che subisce, nel tempo dt, il volume S, sarà

$$d\mathrm{S} = dt\,.\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma\,,$$

e, perciò,

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,.$$

Analogamente sarà $\mu' = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathrm{S}'}{dt}$. Onde, ponendo

$$q = \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,.\,\frac{d\mathrm{S}'}{dt}\,,$$

avremo

$$f = \frac{q}{r^2}\,:$$

dalle quali formule vediamo che se in un certo istante i volumi S, S' sono ambedue crescenti od ambedue decrescenti, e quindi $q > 0$, la forza (f) è realmente un'attrazione; altrimenti, è una ripulsione.

4. Il valor medio (F') della forza (F), quindi ancora della forza (**F**), in un intervallo multiplo di θ, o uguale a θ, sarà la risultante della forza (f') di grandezza

$$f' = \frac{q'}{r^2},$$

ove q' è il valore medio di q, e delle analoghe relative agli altri corpi. Avremo dunque:

$$q' = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta q\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^\theta \frac{dS}{dt}\frac{dS'}{dt}\frac{dt}{\theta}.$$

Facciamo ora un'ipotesi più particolare intorno al modo di variare dei volumi S, S', ecc.: supponiamo cioè che si abbia

$$S = S_0(1 + h\varepsilon),\ \text{ecc.},$$

ove S_0 ed h rappresentano due quantità costanti per il corpo C, ε una funzione del tempo, periodica con periodo θ, uguale per tutti i corpi. Se poniamo $m = hS_0$, $m' = hS'$, sarà: $\frac{dS}{dt} = m\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{dS'}{dt} = m'\frac{d\varepsilon}{dt}$. E, perciò,

$$q' = \frac{m\,m'}{4\pi}\int_0^\theta \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 \frac{dt}{\theta};$$

quindi

$$f' = k\frac{m\,m'}{r^2},$$

essendo

$$k = \frac{1}{4\pi}\int_0^\theta \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 \frac{dt}{\theta}.$$

In questo caso, dunque, attribuito alla costante dell'attrazione il valore dato dall'ultima formula, si ha una perfetta analogia tra la forza (F') e le attrazioni newtoniane delle masse ideali (costanti) m, m', ...

5. Nella formula $S = S_0(1 + h\varepsilon)$ noi possiamo sostituire ad ε una funzione lineare di ε, con che verranno solo a variare le costanti S_0 ed h. Potremo allora fare in modo che il massimo e il minimo valore della funzione periodica ε siano $+1$ e -1. Diciamo S_1 ed S_2 i valori corrispondenti di S (notando che, se la costante h è negativa, S_1 rappresenterà il valor *minimo* di S). Si avrà $S_1 - S_2 = 2hS_0 = 2m$; quindi

$$m = \tfrac{1}{2}(S_1 - S_2).$$

Le masse m vengono così ad essere le semi-differenze fra i valori estremi dei volumi dei corpi.

Quanto alla costante k, osserviamo che, se s'introduce la variabile $\tau = \frac{t}{\theta}$, si ha $d\tau = \frac{dt}{\theta}$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\theta}\frac{d\varepsilon}{d\tau}$,

$$k = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}\right)^2 d\tau .$$

Di qui vediamo che per una determinata funzione $\varepsilon(\tau)$ (per esempio, se $\varepsilon = \operatorname{sen} 2\pi\tau = \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\theta}$) *la costante dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato del periodo.*

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota II del Corrispondente F. Enriques.

8. La costruzione delle superficie con un fascio di curve ellittiche C, di determinante 1, si desume dall'analisi fatta nella mia Nota citata, del gennaio 1912.

Tipo di codeste superficie di determinante 1 è un cono doppio di genere $p_g - p_a$ (per $p_a \geq 0$), avente una curva di diramazione che interseca le generatrici in tre punti variabili.

Nel caso delle *superficie regolari*, a cui possiamo riferirci per semplicità di discorso, si ha dunque come tipo *un tipo doppio con curva di diramazione d'ordine* $2n$, *dotata d'un punto* $(2n-3)$ plo.

Appare così (accanto al determinante d, che nel nostro caso è preso $= 1$) *un secondo carattere intero delle superficie con* $p'' = 1$ $(p^{(1)} P_{12} > 1)$, cioè il numero n, *che può ricevere qualsiasi valore*

$$n = 4, 5, \ldots$$

(per $n = 3$ si ha una superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1 ;$$

per $n = 2$, una superficie razionale).

Se si assume ad arbitrio nel piano una curva di diramazione K_{2n} di ordine $2n$, con un punto $(2n-3)$ plo, O, si ha un piano doppio che ha, *in generale*, i caratteri seguenti:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} p^{(1)} = 1 \\ p = p_a = p_g = n - 2 . \end{cases}$$