ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sulle funzioni di linee.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

È ormai ben noto che un vero rinnovamento del Calcolo delle Variazioni potrà aversi sol quando questa teoria verrà considerata definitivamente come un capitolo di quel Calcolo funzionale che ha già avuto notevolissimi sviluppi per opera di Volterra, Pincherle, Bourlet, Hadamard, Fréchet, Riesz ed altri, ed al quale pare riserbato, in un futuro assai prossimo, un posto di singolare importanza nell'analisi. Non è quindi ozioso l'occuparsi un poco del come deve impostarsi questo Calcolo funzionale perchè riesca veramente utile ai fini del Calcolo delle Variazioni.

Limitandosi al problema più semplice, a quello relativo a integrali estesi a linee, subito si vede che, nel Calcolo delle Variazioni, si presentano le così dette *funzioni di linee*, e che perciò si è condotti naturalmente al Calcolo funzionale del Volterra.

Scopo di questa Nota è di esaminare il valore del concetto di continuità nella teoria della funzioni di linee, in relazione al problema detto di Calcolo delle Variazioni.

1. Sia dunque $F(x, y, x', y')$ la solita funzione del Calcolo delle Variazioni, finita e continua, insieme colle sue derivate parziali dei primi tre ordini, in un campo A del piano (x, y) e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti alla disuguaglianza $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Sia poi C una curva, appartenente al campo detto, continua e rettificabile.

Si consideri l'integrale

$$J(C) = \int_C F(x, y, x', y')\, ds,$$

dove le x', y' rappresentano le derivate delle coordinate x, y dei punti di C, espresse in funzione dell'arco s della curva stessa, e si supponga che la funzione di linea J(C) sia continua.

Vediamo, innanzi tutto, di definire con esattezza questa continuità.

Diremo che una curva C' (considereremo sempre curve continue, rettificabili) *appartiene ordinatamente ad un intorno* (ϱ) *di* C, se è possibile di porre tra le curve una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre minore del numero positivo ϱ.

Diremo, poi, che la funzione di linea J(C) è *continua sull'elemento* C, se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$

tale che, per ogni curva C′ di A appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C, si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon .$$

2. Questa continuità, quali particolarità presuppone nella funzione $F(x, y, x', y')$?

Sia P un punto qualsivoglia di C, e si consideri una curva chiusa γ, passante per esso e giacente tutta nel cerchio di centro P e raggio ϱ, cerchio che indicheremo con la scrittura (P, ϱ). Per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale

$$\int_\gamma F\, ds$$

deve essere nullo: e ciò qualunque sia la γ. Ed invero, se ciò non fosse, ad ogni intero n corrisponderebbero sempre infinite curve γ_n, tutte contenute nel cerchio $\left(P, \frac{1}{n}\right)$ e tutte soddisfacenti o alla disuguaglianza

$$\int_{\gamma_n} F\, ds > 0 ,$$

oppure alla contraria. Suppongasi, per fissare le idee, che si verifichi sempre la prima di queste disuguaglianze. Allora, presa una qualsiasi delle curve γ_n, contandola un numero sufficiente di volte, m_n, in modo che sia

$$m_n \int_{\gamma_n} F\, ds > \delta ,$$

dove δ è un numero prefissato, positivo, e unendole la curva C, se ne ottiene un'altra C_n tale che

$$J(C_n) - J(C) > \delta .$$

A questa disuguaglianza devono soddisfare tutte le C_n corrispondenti ad un determinato n: e, ciò qualunque poi sia questo n. E poichè tutte le C_n risultano appartenenti ordinatamente all'intorno $\left(2\frac{1}{n}\right)$ di C, ne viene che la funzione di linea J non può essere continua sulla C.

È dunque provato che, per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale della F esteso alle γ è nullo, e se ne deduce, sempre per lo stesso ϱ, che il medesimo integrale, esteso ad una qualsiasi curva congiungente P con un punto arbitrario di (P, ϱ), e giacente per intero in tal cerchio, è indipendente dal cammino d'integrazione. Per ciascuna di tali curve è allora nulla la variazione prima dell'integrale della F: vale a dire, è soddisfatta l'equazione differenziale di Eulero

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0 ,$$

dove F_1 rappresenta l'invariante di Weierstrass della F. Questa equazione risulta quindi soddisfatta identicamente nel cerchio (P, ϱ), il che porta che sia identicamente

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_{xy'} = F_{yx'} .$$

Essendo

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} ,$$

la prima delle precedenti identità mostra che $F_{x'}$ e $F_{y'}$ sono indipendenti da x' e y', che è cioè $F_{x'} = P(x, y)$, $F_{y'} = Q(x, y)$; e la seconda, che queste P e Q verificano l'ugnaglianza

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) .$$

Tutto questo avviene nel cerchio (P, ϱ). E poichè P è scelto comunque su C si può concludere, in forza di un noto ragionamento, che

l'ipotesi della continuità della J(C) *sulla curva* C, *porta che, per tutti i punti di* A *distanti da* C *per meno di un certo* ϱ_1, *è*

$$F(x, y, x', y') = x' F_{x'} + y' F_{y'} = x' P(x, y) + y' Q(x, y) ,$$

con $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Se poi la J(C) è continua su qualunque C di A, le uguaglianze qui scritte valgono in tutto il campo.

3. Da quanto precede, si vede che l'ipotesi della continuità è di troppo restrittiva, portando ad escludere tutti quegli integrali che veramente interessano nel Calcolo delle Variazioni.

La continuità è dunque da scartarsi, almeno nella forma nella quale fu posta più sopra. Si potrebbe però pensare ad una continuità di natura più larga, per esempio alla continuità di ordine 1 dell' Hadamard (secondo il quale, la precedente sarebbe di ordine zero), ed anche a quest'altra, che starebbe fra quella definita più sopra e quella detta or ora dell' Hadamard, e che si può fissare così: la funzione J(C) è continua sull'elemento C se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C' di A, appartenente all'intorno (ϱ) di C, e tale che sia

$$|\text{lunghezza } C' - \text{lungh. } C| < \varrho ,$$

si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon .$$

Secondo questa definizione, la funzione J(C), qualunque sia la $F(x, y, x', y')$ (purchè soddisfacente alle condizioni iniziali da noi poste al n. 1), risulte-

rebbe *sempre* funzione continua. Ed infatti, come ho altrove dimostrato [1], sta la seguente proposizione: « Se la curva C′ tende alla C, in modo che differenza delle rispettive lunghezze tenda a zero, è

$$\lim_{C' \equiv C} \int_{C'} F\, ds = \int_{C} F\, ds\,;$$

e ciò vale, solo che la F soddisfi alle condizioni poste al principio del n. 1 » Possiamo anzi aggiungere [2] che la condizione del tendere allo zero della differenza delle lunghezze delle curve C′ e C, è non solo sufficiente, bensì anche necessaria, affinchè si abbia l'uguaglianza precedente. tutte le volte che l'invariante di Weierstrass si mantenga diviso da zero sulla C e per qualunque coppia x', y' tale che sia $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Questo mostra, in particolare, che neppure aggiungendo una limitazione sulla lunghezza delle curve da considerare (limitazione che si presenta spontaneamente per es., in molti problemi isoperimetrici) è possibile di render continui, secondo la definizione del n. 1, gli integrali relativi al caso *regolare* (pei quali l'invariante di Weierstrass si mantiene, precisamente, sempre diverso da zero).

4. Peraltro, la definizione di continuità ora proposta non presenta di fronte ai problemi di calcolo delle variazioni, quel medesimo valore che la continuità delle funzioni di variabili numeriche ha rimpetto alle questioni di massimo e minimo. Ciò che, invece, sembra rispondere alle esigenze del calcolo delle variazioni, è il concetto di *semicontinuità*, che Baire ha fissato per le funzioni del calcolo ordinario e che io ho già cercato di introdurre nelle questioni che qui ci occupano.

Il concetto di *semicontinuità* si ha analizzando quello di continuità, preso, nel caso nostro, nella forma del n. 1, scindendolo nei suoi due elementi costitutivi.

Diremo che la J(C) è *semicontinua inferiormente* (*superiormente*) sull'elemento C, se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C′ di A, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C, si abbia

$$J(C') - J(C) > \varepsilon \quad (< \varepsilon).$$

Come è evidente, se la J(C) è semicontinua, tanto inferiormente quanto superiormente, è anche continua nel senso del n. 1.

Ciò che è essenziale, circa il valore della semicontinuità, è questo: le funzioni semicontinue inferiormente (superiormente) si comportano, di fronte

[1] *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni*, Nota II (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 1° sem.).

[2] Cfr. L. Tonelli, *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*. Nota III (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 2° sem.).

ai minimi (massimi), proprio come le funzioni continue. Si tratta però di vedere se questo concetto di semicontinuità porti o no a scartare i casi più interessanti del calcolo delle variazioni. Qui la risposta è confortante. Si può, infatti, dimostrare [1] che, se l'invariante di Weierstrass, F_1, si mantiene sempre diverso da zero (caso detto *regolare*), J(C) è una funzione semicontinua: e precisamente, semicontinua inferiormente, se è $F_1 > 0$; superiormente, se $F_1 < 0$.

5. Questa semicontinuità fu già da me [2] applicata alla dimostrazione dell'esistenza del minimo nel caso in cui siano verificate entrambi le condizioni $F > 0$, $F_1 > 0$; ed anche nell'altro, $F > 0$, $F_1 \geq 0$. Qui mi propongo di mostrare come da essa scenda immediatamente anche l'esistenza del minimo nel così detto *problema discontinuo*, in quello cioè nel quale la funzione F, che si tratta di integrare, presenta delle discontinuità nel campo in cui la si considera.

Tale problema ha un'importanza pratica, perchè ad esso conducono diverse questioni di fisica-matematica, delle quali citeremo solo quella relativa alla propagazione della luce attraverso un mezzo composto di parti eterogenee, per le quali l'indice di rifrazione presenti delle discontinuità.

Supponiamo, per semplificare il ragionamento, che ci sia una sola discontinuità: vale a dire, che il campo A, che supporremo limitato, sia diviso da una linea Γ in due altri $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, nei quali si abbia, rispettivamente,

$$F = F^{(1)} \quad , \quad F = F^{(2)} ,$$

dove queste $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ saranno funzioni aventi, ciascuna nel proprio campo, le stesse proprietà enunciate per la F al principio del n. 1. Si supponga, inoltre, che si abbia sempre (eccettuate le solite coppie x', y' verificanti l'uguaglianza $x'^2 + y'^2 = 0$)

$$F^{(1)} > 0 \ , \ F_1^{(1)} > 0 \quad ; \quad F^{(2)} > 0 \ , \ F_1^{(2)} > 0 .$$

Presi due punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, rispettivamente in $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$, si consideri una curva (continua e rettificabile) α, congiungente i punti detti e composta di due archi $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, il primo dei quali sia contenuto in $A^{(1)}$ (contorno compreso), e il secondo in $A^{(2)}$ (pure contorno compreso).

Dico che, fra tutte le possibili curve α, ve n'è una almeno per la quale

$$\int_\alpha F\, ds = \int_{\alpha^{(1)}} F^{(1)} ds + \int_{\alpha^{(2)}} F^{(2)} ds$$

è minimo (*assoluto*).

[1] L. Tonelli, *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1913, 1° sem.).

[2] loc. cit.

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, una successione minimizzante, tale cioè che $\int_{\alpha_n} F\,ds$ tenda al limite inferiore i dell'integrale della F esteso a tutte le possibili curve α. Osserviamo, prima di proseguire, che l'esistenza di questa successione è del tutto indipendente dal postulato di Zermelo, come risulta da una mia Nota: *Sul valore di un certo ragionamento* (¹).

Indicheremo con O_n il punto di α_n che divide questa stessa curva nelle sue due parti $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}$. O_n giace necessariamente su Γ, e la successione $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ ammette (su Γ) uno o più punti limiti. Sia O uno di essi. Possiamo, senz'altro, ammettere che sia addirittura $O = \lim_{n=\infty} O_n$. Le lunghezze delle α_n sono tutte inferiori ad un numero fisso, perchè è sempre $F^{(1)} > 0$, $F^{(2)} > 0$. Tali curve ammettono perciò una o più curve limiti. Se $\bar{\alpha}$ è una di esse, questa $\bar{\alpha}$ dovrà passare per O, e sarà la curva a cui tenderà una successione $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots$, estratta dalla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. E avremo, per la *semicontinuità inferiore*,

$$\int_{\bar{\alpha}^{(1)}} F^{(1)}\,ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(1)}} F^{(1)}\,ds$$

$$\int_{\bar{\alpha}^{(2)}} F^{(2)}\,ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(2)}} F^{(2)}\,ds\,,$$

e quindi

$$\int_{\bar{\alpha}} F\,ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}} F\,ds = i\,,$$

donde

$$\int_{\bar{\alpha}} F\,ds = i\,,$$

e $\bar{\alpha}$ è una curva *minimum*.

Le condizioni poste, relative all'invariante di Weierstrass, $F^{(1)} > 0$, $F^{(2)} > 0$, non sono essenziali e possono sostituirsi con le altre $F^{(1)} \geq 0$, $F^{(2)} \geq 0$.

Possiamo aggiungere, terminando, che, anche nel caso attuale, dalla semicontinuità in J(C) scende il teorema di Osgood, il cui enunciato e le cui dimostrazioni sono identici a quelli dei nn. 19 e 20 del mio citato lavoro: *Sul caso regolare ecc.*

(¹) Atti R. Acc. delle scienze, di Torino, 1913.