

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Le masse m vengono così ad essere le semi-differenze fra i valori estremi dei volumi dei corpi.

Quanto alla costante k , osserviamo che, se s'introduce la variabile $\tau = \frac{t}{\theta}$, si ha $d\tau = \frac{dt}{\theta}$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\theta} \frac{d\varepsilon}{d\tau}$,

$$k = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^2 d\tau.$$

Di qui vediamo che per una determinata funzione $\varepsilon(\tau)$ (per esempio, se $\varepsilon = \sin 2\pi\tau = \sin 2\pi \frac{t}{\theta}$) la costante dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato del periodo.

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$.*
Nota II del Corrispondente F. ENRIQUES.

8. La costruzione delle superficie con un fascio di curve ellittiche C , di determinante 1, si desume dall'analisi fatta nella mia Nota citata, del gennaio 1912.

Tipo di codeste superficie di determinante 1 è un cono doppio di genere $p_g - p_a$ (per $p_a \geq 0$), avente una curva di diramazione che interseca le generatrici in tre punti variabili.

Nel caso delle *superficie regolari*, a cui possiamo riferirci per semplicità di discorso, si ha dunque come tipo un tipo doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$, dotata d'un punto $(2n - 3)$ plo.

Appare così (accanto al determinante d , che nel nostro caso è preso $= 1$) un secondo carattere intero delle superficie con $p'' = 1$ ($p^{(1)} P_{12} > 1$), cioè il numero n , che può ricevere qualsiasi valore

$$n = 4, 5, \dots$$

(per $n = 3$ si ha una superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_2 = \dots = 1;$$

per $n = 2$, una superficie razionale).

Se si assume ad arbitrio nel piano una curva di diramazione K_{2n} di ordine $2n$, con un punto $(2n - 3)$ plo, O , si ha un piano doppio che ha, in generale, i caratteri seguenti:

$$(a) \quad \begin{cases} p^{(1)} = 1 \\ p = p_a = p_g = n - 2. \end{cases}$$

Ma i generi geometrici si abbassano in corrispondenza a punti tripli di K_{2n} infinitamente vicini ad O , o a punti quadrupli di K_{2n} non vicini ad O .
Quindi si possono avere per K_{2n} le singolarità seguenti:

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{un punto 4-plo distinto da } O, \text{ che porta} \\ p = p_a = p_g = n - 3; \end{array} \right.$$

oppure

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 1, 2, \dots \left(\sigma < \left[\frac{2n-3}{3} \right] \right) \text{ punti tripli infinitamente} \\ \text{vicini ad } O, \text{ che portano} \\ p = p_a = p_g = n - 2 - \sigma. \end{array} \right.$$

Se la K_{2n} possiede altre singolarità, il suo ordine può essere abbassato con una trasformazione birazionale del piano.

In conclusione: le superficie regolari con $p^{(1)} = 1$, $p_g P_{12} > 1$, di determinante 1, formano un'infinità numerabile di famiglie di piani doppi, la cui curva di diramazione ha l'ordine minimo

$$2n = 8, 10, \dots$$

Ad ogni valore di n corrispondono $\left[\frac{2n-3}{2} \right] + 2$ famiglie di superficie, per cui

$$p = p_a = p_g = n - 2, n - 3, \dots, n - 2 - \left[\frac{2n-3}{3} \right]$$

$$P_i = i(p - 1) + 1;$$

vi sono due famiglie distinte per $p = n - 3$.

Le famiglie suindicate si possono caratterizzare come segue:

famiglia α): $p = n = 2$; piano doppio privo di curve eccezionali, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, dotata di punto $(2n - 3)$ plo;

famiglia β): $p = n - 3$; quadrica doppia priva di curve eccezionali, con curva di diramazione, K_{2n} , d'ordine $2n$, composta di una generatrice r e d'una curva K_{2n-1} d'ordine $2n - 1$, trisecante le generatrici dell'altro sistema;

famiglia γ):

$$\left(p = n - 2 - \sigma, \sigma = 1, 2, \dots, \left[\frac{2n-3}{3} \right] \right);$$

cono doppio, d'ordine $\sigma + 1$ in $S_{\sigma+2}$, privo di curve eccezionali, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, trisecante le generatrici.

9. È facile determinare la base delle superficie F' delle famiglie α), β), γ). Anzitutto osserviamo che, in generale non vi sono, nel fascio di

curve ellittiche C , curve spezzate. Curve C spezzate si presenteranno infatti quando la K_{2n} possieda un punto doppio o quando vi sia una tangente in O che tocca altrove K_{2n} ; circostanze che non si avverano per la più generale superficie di alcuna delle famiglie suddette.

Ora si consideri sopra F' una curva qualsiasi χ , secante in $v > 1$ punti le C . Sopra F' esiste già — per ipotesi — una curva L , unisecante la C , corrispondente, sul piano doppio, al punto $(2n-3)$ -plo di K_{2n} . Si può quindi ⁽¹⁾ costruire su F' una curva L_1 che seghi le C in un punto il quale, sommato con l'intersezione di L contata $V-1$ volte, dia un gruppo equivalente all'intersezione di χ ; si avrà dunque, per un noto criterio di equivalenza ⁽²⁾,

$$L_1 + (v-1)L = \chi.$$

Si deduce, di qui, che la base di una superficie $F'(p^{(1)} = 1, p_g P_4 > 1)$ di determinante 1, è costituita dal fascio di curve ellittiche C e da curve unisecanti le C .

Ora si cerchi di determinare sul piano doppio, con una K_{2n} di diramazione, immagine di F' , una curva K_m d'ordine m , passante $m-1$ volte per il punto $(2n-3)$ plo di K_{2n} , la quale rappresenti una curva di F' unisecante le C . Il calcolo di costanti che a tale scopo ho svolto nella citata Nota del gennaio 1912, è affetto di un errore che deve correggersi nel senso qui indicato; si correggerà quindi l'enunciato che ne consegue, che pure viene appresso riferito nella forma rettificata.

Le K_m con O $(m-1)$ plo dipendono linearmente da

$$2m$$

costanti. Affinchè una K_m (d'ordine dispari) rappresenti due unisecanti le C su F' , occorre che i

$$2n + 3(m-1)$$

punti intersezioni di essa con K_{2n} si riducano a

$$n + \frac{3(m-1)}{2}$$

contatti; ed occorre, altresì che gli $m-1$ punti di K_m infinitamente vicini ad O si riducano a

$$\frac{m-1}{2}$$

coppie di punti coincidenti.

Si hanno dunque

$$n + 2(m-1)$$

⁽¹⁾ Enriques, Nota citata, Lincei, gennaio 1912.

⁽²⁾ Severi, Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (n. 6), Annali di Mat. 1905.

condizioni da soddisfare coi $2m$ parametri della K_m , il che è, *in generale*, impossibile. Affinchè esista una K_m rispondente al problema, bisogna [nel caso α)] che la K_{2n} soddisfi a

$$p = n - 2$$

condizioni.

Se la K_{2n} ha un punto 4-plo A fuori di O , le K_m per A dipendono da

$$2m - 1$$

costanti e le condizioni richieste sono 2 di meno. Si hanno dunque, nel caso β),

$$p = n - 3$$

condizioni per l'esistenza di K_m .

Se la K_{2n} ha σ punti tripli infinitamente vicini ad O , le K_m per essi dipendono da

$$2m - \sigma$$

costanti. I punti d'intersezione con K_{2n} , fuori di O , sono

$$2n + 3(m - 1 - \sigma)$$

da ridursi a

$$n + 3 \frac{(m - 1 - \sigma)}{2}$$

contatti; e i punti infinitamente vicini ad O , oltre i punti tripli, sono

$$m - 1 - \sigma$$

da ridursi a

$$\frac{m - 1 - \sigma}{2}$$

coppie di punti coincidenti. Quindi le condizioni per l'esistenza della K_m richiesta, sono, nel caso γ),

$$n + 2(m - 1 - \sigma) - (2m - \sigma) = n - 2 - \sigma = p.$$

Si conclude che:

Sulle superficie F' la base è in generale costituita dal fascio di curve ellittiche C e dalla loro unisecante; affinchè esista un'altra curva unisecante la C , indipendente dalla prima, la superficie deve soddisfare a p condizioni. Queste condizioni caratterizzano le superficie con un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali in se stesse ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rendic. Lincei (1905).

Una superficie F^d di determinante F^d avrà pure in generale il numero-base uguale a 2; e le *condizioni* perchè la base sia più ampia in guisa che esista un *gruppo discontinuo* di trasformazioni ⁽¹⁾, si riducono alle condizioni analoghe per la superficie di determinante 1, F' , che corrisponde a F^d (Cfr. Nota I).

Così, p. es., le superficie d'ordine $n > 3$, con retta $(n-3)$ pla, sono superficie con $p^{(1)} = 1$, possedenti un fascio di cubiche (determinante 3), le quali non ammettono in generale un gruppo discontinuo di trasformazioni in se stesse.

10. Calcoliamo ora il numero M dei moduli appartenenti alle famiglie α), β), γ) di superficie regolari F' ($n \geq 8$).

α) ($p = n - 2$). Una K_{2n} con un punto $(2n-3)$ plo fisso dipende da

$$8n - 3 = \frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{2}$$

costanti. Essendoci ∞^6 omografie piane che lasciano fermo il punto suddetto, si otterranno

$$M = 8n - 9 = 8p + 7$$

moduli.

β) ($p = n - 3$). Le K_{2n} piane, aventi un punto $(2n-2)$ plo A e un punto 4-plo B, dipendono da

$$8n - 13 = \frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{2} - 10$$

costanti. Tenendo conto che ci sono ∞^6 trasformazioni quadratiche lascianti invariato il sistema delle coniche per A e B, si deduce

$$M = 8n - 19 = 8p + 5.$$

γ) ($p = n - 2 - \sigma$). Le K_{2n} con un punto $(2n-3)$ -plo e σ punti tripli infinitamente vicini, dipendono da

$$8n - 3 - 6\sigma$$

costanti. Bisogna defalcare l'infinità delle trasformazioni proiettive del cono razionale normale d'ordine $\sigma + 1$ in $S_{\sigma+2}$, che è

$$\sigma + 6.$$

Si ottiene quindi

$$M = 8n - 7\sigma - 9,$$

cioè

$$M = 8p + \sigma + 7.$$

Questi numeri danno luogo ad alcune osservazioni.

⁽¹⁾ Loc. cit.

Le superficie regolari di genere superficiale $p_a = p_g = p$, e di genere lineare $p^{(1)}$ ($P_{12} > 0$), contengono, in generale ⁽¹⁾,

$$M = 9p - 2p^{(1)} + 12 + \Theta$$

moduli, dove, in ogni caso,

$$\Theta \geq 0.$$

Ora, per le superficie α) si trova

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 9, \quad (p^{(1)} = 1)$$

per le β)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 7,$$

per le γ)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + \sigma + 9.$$

Accade dunque che nei casi α) β) e nel caso γ) per $\sigma \leq p + 2$, il numero dei moduli da cui dipendono le superficie F' risulta inferiore a quello che viene indicato dalla formula generale:

La contraddizione apparente si risolve osservando che le superficie F' appartengono ad una più ampia famiglia di superficie con $p^{(1)} = 1$, di determinante 2, aventi il medesimo genere p ; entro questa famiglia, le F' si distinguono per una particolarità aritmetica che diminuisce il numero dei moduli.

Infatti, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 3)$ -plo, è un caso particolare del piano doppio con K_{2n} , di diramazione dotata di un punto $(2n - 4)$ -plo. I moduli di queste ultime superfici F^2 risultano

$$M = 10n - 12 = 10p + 8,$$

cioè

α)

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10.$$

Similmente, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 3)$ -plo e d'un punto 4-plo, è caso particolare del piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 4)$ -plo e d'un punto 4-plo, il quale contiene

$$M = 10n - 22 = 10p + 8,$$

cioè

β)

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10$$

moduli.

Onde risulta che, nei casi α) e β),

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10 \geq 9p - 2p^{(1)} + 12$$

se

$$p > 1.$$

⁽¹⁾ Enriques, Rendic. Acc. Lincei, giugno 1908.

Per $p=1$ manca un modulo, e ciò corrisponde al fatto che le nostre superficie coi generi $p=P_2=1$, contenenti un fascio di curve ellittiche, fanno parte di una più ampia famiglia di superficie cogli stessi generi, che non contengono fasci di curve ellittiche: tali sono, nel caso α), i piani doppi con sestica K_6 di diramazione affatto generale; e nel caso β) le superficie del 4° ordine, che solo in casi particolari si riducono a quadriche doppie con curva K_8 di diramazione.

Resta infine da considerare il caso γ) per

$$\sigma < p + 3,$$

cioè per

$$\sigma \leq p + 2$$

$$(p = n - 2 - \sigma)$$

$$\sigma \leq \frac{n-2}{2} + 1.$$

E per spiegare la circostanza segnalata, basta notare che, in questo caso, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata di un punto O $(2n-3)$ -plo e σ punti tripli infinitamente vicini, è un caso particolare di quello con curva di diramazione K_{2n} dotata di un punto $(2n-4)$ -plo e di σ punti quadrupli; piano doppio che si riduce ad avere una curva di diramazione d'ordine più basso, e che contiene un maggior numero di moduli.

Geologia. — *Sulla presenza di una breccia ossifera quaternaria nelle Formiche di Grosseto.* Nota del Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Nel luglio dell'anno scorso, S. M. il Re mi fece pervenire, per mezzo del suo primo aiutante di campo generale Brusati, alcuni campioni di rocce raccolti in uno dei suoi viaggi nel Tirreno e precisamente nelle isolette dette le Formiche di Grosseto.

Mentre compio il gradito dovere di esprimere i sensi della mia profonda gratitudine a S. M. il Re per aver voluto personalmente contribuire ai miei studi mineralogici e litologici sull'arcipelago Toscano, sono ben lieto di poter nello stesso tempo comunicare all'Accademia qualche breve notizia intorno ad alcuni di detti campioni, che hanno importanza per la storia geologica delle isole del Tirreno.

Le Formiche di Grosseto formano un piccolo gruppo a breve distanza dalla costa della Maremma Toscana. L'isola maggiore è situata ad una ventina di chilometri all'incirca a ponente di Talamone e si solleva nel suo punto più alto soltanto 11 metri sul livello del mare; la sua lunghezza nell'asse maggiore sorpassa appena il mezzo chilometro. Un'altra isoletta di