ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Senza pretendere di entrare nella vessata questione della Tirennide ancora dibattuta fra i geologi, mi limito a segnalare l'importanza del fatto, che anche nelle piccole Formiche di Grosseto, ormai battute e quasi demolite dal mare, si trovino, come in altre isole del Tirreno, gli avanzi di una fauna numerosa, alla cui vita era certamente necessaria una terra ben più vasta, di cui le isole attuali possono non esser altro che l'ultimo residuo.

Fisiologia. — *Ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. P. I. Dei fenomeni tonici e clonici e della loro genesi nei muscoli striati e lisci.* Memoria del Corrisp. F. Bottazzi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media.* Nota di Luigi Amoroso, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

Il sistema che considero è quello a cui soddisfano la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una funzione di due variabili complesse $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, e cioè

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Secondo il teorema di Gauss, una funzione $u(x, y)$, armonica in un certo campo finito, è, in ogni punto, la media dei valori che essa prende sopra ogni circonferenza, che ha centro in quel punto; e viceversa — secondo il Levi [1] — ogni funzione $u(x, y)$ continua entro un certo campo, che inoltre in ogni punto abbia come valore la media dei valori che assume sopra una circonferenza arbitraria di centro quel punto, è armonica.

Segue, come corollario immediato, che, se $u(x_1, y_1 \mid x_2, y_2)$ è una funzione armonica tanto rispetto alla coppia di variabili x_1, y_1, quanto rispetto alla coppia di variabili x_2, y_2, entro un campo finito S a quattro dimensioni, essa assume, in ogni punto $x_1, y_1 \mid x_2, y_2$ di questo campo, la media

[1] Cfr. E. E. Levi, *Sovra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, Rend. Accad. Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1º sem., fasc. 1º, 1909. Sullo stesso argomento cfr. V. Volterra, *Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione*, Rend. Accad. Lincei, serie 5ª, vol. XVIII, 1909; Tonelli, Rend. Accad. Lincei, serie 5ª, vol. XVIII, 1909; Vitali, Rend. Accad. Lincei, serie 5º, vol. XXI, 1912.

dei valori, che assume sopra la intersezione completa delle due varietà a tre dimensioni

$$(2)\qquad (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = R_1^2 \,,\ (X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2) = R_2^2 \,,$$

R_1, R_2 essendo *costanti arbitrarie.*

In formule, è

$$(3)_1\qquad u(x_1, y_1 | x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1\cos\theta_1, y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2\cos\theta_2, y_2 + R_2\operatorname{sen}\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \,.$$

E, *viceversa*, ogni funzione $u\ (x_1, y_1 \mid x_2, y_2)$, continua entro un certo campo S a quattro dimensioni, che assuma, in ogni punto $x_1, y_1 \mid x_2, y_2$ di questo campo, la media dei valori che assume sopra la intersezione completa di due varietà (2), R_1, R_2 essendo costanti arbitrarie, è armonica tanto rispetto alla coppia di variabili x_1, y_1, quanto rispetto alla coppia di variabili x_2, y_2.

Ma una funzione armonica in x, y è la parte reale di una funzione della variabile complessa $x + iy$: invece, la parte reale di una funzione delle due variabili complesse $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, non solo è armonica rispetto ad ambedue le coppie di variabili $x_1, y_1 \mid x_2, y_2$, [il che porta che sono verificate le due equazioni (1) della prima orizzotale], ma soddisfa *a tutte e quattro* le equazioni del sistema (1); onde il corollario precedente, se dà una proprietà di questo sistema, non dà tuttavia una proprietà *caratteristica* del sistema stesso.

2. È notevole che una tale proprietà caratteristica si ottiene, associando alla condizione espressa dalla $(3)_1$ la quale porta sulla media dei valori di u sulle varietà (2), due condizioni che esprimono ancora proprietà delle medie, *convenientemente ponderate*, dei valori di u sempre sulle varietà medesime: e, propriamente, associando alla $(3)_1$ le due seguenti relazioni:

$$(3)_2\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1\cos\theta_1, y_1 + R_1\operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2\cos\theta_2, \\ \qquad\qquad y_2 + R_2\operatorname{sen}\theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0\,, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1\cos\theta, y_1 + R_1\operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2\cos\theta_2, \\ \qquad\qquad y_2 + R_2\operatorname{sen}\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0\,. \end{cases}$$

Sussistono invero le due proposizioni seguenti, detto (3) il sistema formato dalle $(3)_1$ e $(3)_2$:

I. *Ogni funzione continua entro un certo campo* S *a quattro dimensioni, che verifica ivi al sistema* (3), *è un integrale regolare* [1] *di* (1).

[1] cioè continuo e limitato, colle derivate dei primi due ordini continue e limitate.

II. *Viceversa, un integrale di* (1) *regolare* [1] *verifica, nel campo in cui è definito, al sistema* (3).

DIMOSTRAZIONE DELLA PRIMA PROPOSIZIONE.

3. Sia u una funzione continua entro un campo S a 4 dimensioni, che ivi verifica al sistema (3).

Dalla $(3)_1$, applicando la formula (4) del Levi (Nota citata), segue che esiste $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e che

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2 = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta_1\,u\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_1\,u\,d\theta_1\,d\theta_2\,,\ \text{ecc.} \tag{5}$$

Ma allora, poichè dalla $(3)_1$, derivando sotto il segno

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

risulta che anche $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ verifica alla stessa $(3)_1$ consegue, applicando di nuovo le formule precedenti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_1\,\frac{\partial u}{\partial y_1}\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

per cui è (cfr. la Nota citata del Levi alle formule (6) e seguente)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0\,,\ \text{ecc.}$$

Infine, analogamente,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} &= \frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_1\,\partial y_2} &= \frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial y_2}\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2\,; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

e perciò:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \cos\theta_1 \left(\cos\theta_2 \frac{\partial u}{\partial R_2} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial u}{\partial \theta_2} \operatorname{sen}\theta_2 \right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\theta_1 \left(\operatorname{sen}\theta_2 \frac{\partial u}{\partial R_2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial u}{\partial \theta_2} \cos\theta_2 \right) \right\} d\theta_1\, d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 R_1} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial u}{\partial R_2}\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial u}{\partial \theta_2}\, d\theta_1\, d\theta_2$$

e infine tenendo conto delle (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1} \frac{\partial u(x_1, y_1 | x_2, y_2)}{\partial R_2} + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u \cos(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0, \text{ ecc.}$$

Dimostrazione della seconda proposizione.

4. Sia u un integrale di (1), regolare entro un campo S a quattro dimensioni. Per il corollario, di cui al n. 1, u verifica allora alla $(3)_1$: sussistono quindi, secondo quanto precedentemente, al n. 3, abbiamo dimostrato, le formule (4), (5), (6), e analoghe. Ma, per ipotesi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0;$$

onde consegue, tenuta presente la (7):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u \cos(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0, \text{ ecc.}$$

Osservazione 1ª.

5. La $(3)_1$ può scriversi

$$r_1 r_2 u(x_1 \,.\, y_1, x_2, y_2) = \frac{r_1 r_2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + r_1\cos\theta_1, y_1 + r_1 \operatorname{sen}\theta_1 |$$

$$x_2 + r_2 \cos\theta_2 \,.\, y_2 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2,$$

da cui segue, integrando rispetto ad r_1 da O a R_1, e rispetto ad r_2 da O ad R_2, e dividendo per $R_1\,R_2$,

$$u(x_1 \,.\, y_1 \,,\, x_2 \,,\, y_2) = \frac{1}{\pi^2 R_1^2 R_2^2} \int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2} u(x_1 + R_1 \cos\theta_1 \,,\, y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 \mid x_2 + r_2 \cos\theta_2 \,.\, y_2 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \,,$$

σ_1 essendo, nel piano delle variabili x_1, y_1, l'area del cerchio che ha centro in x_1, y_1 e raggio R_1, ecc. — *Questa formula rappresenta una seconda forma, in cui può esser posto il teorema della media.* Analoga trasformazione può farsi per le altre due $(3)_1$.

Vale ancora la pena di osservare che teoremi di media *ponderata*, analoghi a quelli espressi dalle $(3)_2$, si hanno tutte le volte che si sostituiscono le equazioni del secondo rigo di (1) con altre simili equazioni lineari a coefficienti costanti nelle u e nelle derivate. Al variare di queste equazioni, variano le funzioni che danno il peso.

Osservazione 2ª.

6. È assai facile di vedere che l'ipotesi della continuità per la funzione u relativamente alla dimostrazione della prima proposizione è troppo restrittiva. Tenendo presente le citate Note dei prof. Levi, Tonelli, Vitali, si riconosce, a prima vista, che ad essa può sostituirsi un'ipotesi assai più larga e che consiste nel ripetere, per ambedue le coppie di variabili $x_1, y_1 \mid x_2, y_2$, le le condizioni che gli autori sopra citati pongono per ciascuna delle due coppie stesse.

Osservazione 3ª.

7. Credo opportuno, terminando, richiamare l'attenzione sopra il fatto che *ogni teorema della media*, in sostanza, porta ad una notevole proprietà dello sviluppo di Fourier. Consideriamo, per es., una funzione u armonica nelle due variabili x ed y: supposto che r, θ denotino un sistema di coordinate polari col polo in x, y lo sviluppo sopra accennato dà

$$u(x + r\cos\theta \,,\, y + r \operatorname{sen}\theta) =$$
$$= A_0 + r\,(A_1 \cos\theta + A_2 \operatorname{sen}\theta) + r^2\,(B_1 \cos 2\,\theta + B_2 \operatorname{sen} 2\,\theta) + \ldots;$$

le A_r, B_r essendo funzioni di x, y. Segue, calcolando i coefficient, di Fourier, e tenendo presente il significato delle A e delle B:

$$u(x\,,\,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta \,,\, y + r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \,,$$

$$\frac{\partial u(x\,,\,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta \,,\, y + R \operatorname{sen}\theta)\cos\theta\, d\theta \,,\,..\ \text{ecc.}$$

formole valide, qualunque sia R al secondo membro.

Il teorema della media porta, in sostanza, a questo: che, *dalla prima di queste formule, relativa alla funzione u*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\theta ,$$

derivano come conseguenza tutte le altre, relative alle derivate della funzione u, sempre che la precedente si supponga verificata per un punto generico del piano delle variabili x y e per ogni valore generico di R.

Analoga considerazione potrebbe svilupparsi pel teorema dimostrato in questa Nota, relativo al sistema (1).

Meccanica celeste. — *Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il prof. A. Crommelin, in un recente articolo intitolato « The origin and nature of comets », pubblicato nella Rivista di scienza [1], ha profondamente studiato il problema dell'origine delle comete.

Egli si domanda (come del resto aveva già scritto il Fabry qualche anno prima) come mai non sia stata fin qui osservata alcuna cometa nettamente iperbolica. Non potendo ammettere che tutti questi astri entrino nella sfera d'attrazione del sole, con velocità estremamente piccola, dichiara che questo fatto costituisce una prova innegabile dell'origine solare delle comete.

Ora a me sembra che tale ragionamento abbia un punto debole: il Crommelin e il Fabry infatti non tengono conto della distanza perielia che deve risultare assai piccola perchè la cometa sia osservabile.

La cometa di Tempel II, p. es., che è una delle più lontane, ha per distanza perielia $p = 2{,}073322$. Per distanze notevolmente maggiori sembra che i raggi solari siano impotenti a determinare nel nucleo cometario lo svolgimento di quelle emanazioni che generano la coda e la chioma. Partendo da questo fatto, e basandomi su concetti generalmente ammessi, io mi propongo di dimostrare che, anche nell'ipotesi che molte comete provengano dall'esterno del sistema solare, la probabilità di osservarne una con orbita nettamente iperbolica risulta sempre immensamente piccola.

La mancanza di tale osservazione non potrà perciò essere invocata come argomento decisivo contro l'ipotesi stessa, come fanno il Fabry ed il Crommelin.

[1] « Rivista di scienza », anno VII (1910), vol. IV.