ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Il teorema della media porta, in sostanza, a questo: che, *dalla prima di queste formule, relativa alla funzione u*

$$u(x\,,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\theta\,,$$

derivano come conseguenza tutte le altre, relative alle derivate della funzione u, sempre che la precedente si supponga verificata per un punto generico del piano delle variabili x y e per ogni valore generico di R.

Analoga considerazione potrebbe svilupparsi pel teorema dimostrato in questa Nota, relativo al sistema (1).

Meccanica celeste. — *Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il prof. A. Crommelin, in un recente articolo intitolato « The origin and nature of comets », pubblicato nella Rivista di scienza [1], ha profondamente studiato il problema dell'origine delle comete.

Egli si domanda (come del resto aveva già scritto il Fabry qualche anno prima) come mai non sia stata fin qui osservata alcuna cometa nettamente iperbolica. Non potendo ammettere che tutti questi astri entrino nella sfera d'attrazione del sole, con velocità estremamente piccola, dichiara che questo fatto costituisce una prova innegabile dell'origine solare delle comete.

Ora a me sembra che tale ragionamento abbia un punto debole: il Crommelin e il Fabry infatti non tengono conto della distanza perielia che deve risultare assai piccola perchè la cometa sia osservabile.

La cometa di Tempel II, p. es., che è una delle più lontane, ha per distanza perielia $p = 2{,}073322$. Per distanze notevolmente maggiori sembra che i raggi solari siano impotenti a determinare nel nucleo cometario lo svolgimento di quelle emanazioni che generano la coda e la chioma. Partendo da questo fatto, e basandomi su concetti generalmente ammessi, io mi propongo di dimostrare che, anche nell'ipotesi che molte comete provengano dall'esterno del sistema solare, la probabilità di osservarne una con orbita nettamente iperbolica risulta sempre immensamente piccola.

La mancanza di tale osservazione non potrà perciò essere invocata come argomento decisivo contro l'ipotesi stessa, come fanno il Fabry ed il Crommelin.

(1) « Rivista di scienza », anno VII (1910), vol. IV.

Formule di partenza.

Prendendo per centro il sole S, immaginiamo una sfera σ di raggio r, tale che, in essa, l'attrazione solare sia preponderante rispetto a quella degli astri. Indichiamo con $N(v, r)$, o semplicemente con N, il numero delle comete che entrano in σ, in un certo tempo τ, con velocità fisicamente uguale a v. Sceglieremo τ in modo che N risulti possibilmente grande, tanto da poter applicare senza errore sensibile il noto teorema di Bernouilli.

Indichiamo con $\varphi(\omega, r)d\omega$ la probabilità che l'angolo d'incidenza (contato dalla normale interna), con cui una delle N comete entra nella sfera σ, sia compreso tra ω e $\omega + d\omega$, ammettendo per semplicità che φ non dipenda dal punto in cui la cometa passa attraverso σ, ma solo da r e da ω.

Avremo allora, qualunque sia r,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega, r)\, d\omega = 1\,; \tag{1}$$

mentre, d'altra parte, il numero N_α delle comete che entrano in σ con un angolo minore o, al più, eguale ad α, sarà dato prossimamente da

$$N_\alpha = N \int_0^{\alpha} \varphi(\omega, r)\, d\omega\,. \tag{2}$$

Relazione tra le funzioni φ.

Ciò posto, indichiamo con σ_1 una nuova sfera concentrica ed interna a σ, e con ϱ il suo raggio, $(\varrho < r)$. Si tratta di trovare una relazione tra $\varphi(\omega, r)$ e $\varphi(\omega, \varrho)$.

A tale scopo, supponiamo che una cometa entrata in σ con angolo di d'incidenza λ e con velocità v, entri in σ_1 con angolo d'incidenza μ e con velocità v_1. Le quantità v_1 e μ saranno legate a v e λ dalle relazioni

$$rv \operatorname{sen} \lambda = \varrho\, v_1 \operatorname{sen} \mu \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{Mf}{r} = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{Mf}{\varrho} = h \tag{4}$$

la prima delle quali è data dal teorema delle aree, la seconda da quello delle forze vive: M ed f indicano la massa solare e il coefficiente attrattivo; h è la costante delle forze vive.

Escludiamo le comete ellittiche che non entrano nelle nostre considerazioni, e supponiamo, perciò, $v \geq \sqrt{\dfrac{2Mf}{r}}$.

Avremo allora, eliminando v_1 tra la (3) e la (4),

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\mu}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{5}$$

Il secondo membro (che non può mai annullarsi perchè si ha $\varrho < r$) è una funzione crescente di ϱ, come possiamo facilmente dimostrare prendendone la derivata. Poichè senμ, in valore assoluto, deve essere necessariamente minore o, al più eguale, ad 1, ne segue che, delle N comete considerate, entreranno in σ_1 soltanto quelle che hanno traversato la sfera σ con un angolo d'incidenza non superiore a ψ; essendo ψ dato dalla relazione

$$\operatorname{sen}\psi=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}. \tag{6}$$

Soddisfacendo v alla condizione di parabolicità o iperbolicità, risulta $|\operatorname{sen}\psi| \leq \left|\sqrt{\frac{\varrho}{r}}\right| < 1$; e quindi il calcolo è sempre possibile.

Dalla 6), ricordando il teorema di Bernouilli che, come abbiamo detto, può qui applicarsi senza errore, ricaviamo che il numero N_ρ delle comete che entrano in σ_1 è dato dall'espressione:

$$N_\rho = N\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}.\operatorname{sen}\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}}\varphi(\omega\,,\,r)\,d\omega\,. \tag{7}$$

Sia λ minore di ψ: le comete entrate in σ con un angolo d'incidenza minore o, al più, eguale a λ (supponendo sempre la velocita d'ingresso eguale a v), entreranno in σ, con un angolo d'incidenza minore, o, al più, eguale a μ: sen λ e sen μ essendo legati dalla relazione (5).

Noi avremo dunque:

$$N\int_0^\lambda \varphi(\omega\,,\,r)\,d\omega = N_\rho\int_0^\mu \varphi(\omega\,,\,\varrho)\,d\omega\,, \tag{8}$$

da cui, eliminando N_ρ per mezzo della (7), avremo:

$$\int_{\omega=0}^{\omega=\mu}\varphi(\omega\,,\,\varrho)\,d\omega = \frac{\displaystyle\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\,.\,\operatorname{sen}\mu\right\}}\varphi(\omega\,,\,r)\,d\omega}{\displaystyle\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\right\}}\varphi(\omega\,,\,r)\,d\omega}\,, \tag{9}$$

che è la relazione funzionale a cui volevamo giungere. In essa, μ figura come un parametro arbitrario; il quale, per ciò che precede, è evidentemente sottomesso alla condizione $\mu \leq \frac{\pi}{2}$. Facendo, p. es., $\mu = \frac{\pi}{2}$, ritroviamo la formola (1) come caso particolare. Differenziando la (9) rispetto a μ, si otterrebbero altri importanti relazioni, che per brevità tralasciamo perchè non necessarie per ciò che diremo.

PROBABILITÀ DI VEDERE UNA COMETA; VALORE PROBABILE DELLA DISTANZA PERIELIACA, DELL' ECCENTRICITÀ, ECC.

Supponiamo ora data tanto la funzione $\varphi(\omega, r_1)$, relativa al valore particolare del raggio $r = r_1$, quanto il numero N_1 di comete che nel tempo τ entrano nella sfera s di raggio r_1, con velocità v. È facile allora il calcolare quante di esse saranno visibili. Infatti, se noi prendiamo come unità di lunghezza il semiasse dell'orbita terrestre, e costruiamo una seconda sfera avente ancora per centro il sole e il cui raggio sia uguale all'incirca a 2, allora, per ciò chè stato detto in principio, potremo considerare come visibili quelle comete che vi entrano.

Chiamando con n_1 il numero di queste comete, si ha:

$$(10)\qquad \frac{n_1}{N_1} = \int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}.\operatorname{sen}\frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega$$

Possiamo anche calcolare il valore probabile δ dell'angolo d'incidenza con cui le n_1 comete visibili entrano nella sfera di raggio 2, o sfera di visibilità. La quantità δ deve infatti soddisfare alla relazione

$$(11)\qquad \int_{\omega=0}^{\omega=\delta} \varphi(r=2\,;\,\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}.$$

Ora, $\varphi(r=2\,;\,\omega)$ è incognita, ma noi possiamo valerci dell'equazione funzionale (9). Da essa infatti ricaviamo

$$(12)\qquad \int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}\cdot\operatorname{sen}\delta\right\}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}\right\}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega\,,$$

e poichè, per ipotesi, $\varphi(\omega, r_1)$ è nota, la (12) ci darà sen δ.

Analogamente potremo conoscere il valore probabile della distanza del perielio e dell'eccentricità delle n_1 comete visibili; la formula (9) ha perciò molta importanza in questa teoria.

Applicazione al caso particolare in cui si supponga che le comete, nelle regioni lontane dagli astri, si muovano in modo che tutte le direzioni risultino egualmente probabili.

Per applicare ora la nostra formula all'esame delle teoria del Crommelin, occorre fare un'ipotesi sulla funzione φ.

Ci fonderemo perciò sul seguente

Postulato. — « Facendo astrazione dalle regioni prossime agli astri, « le comete dello spazio si muovono con legge tale che tutte le direzioni « risultano egualmente probabili ». Ammetteremo ancora che *dentro certi limiti*, tutte le velocità siano equamente ripartite.

Prendiamo ora una sfera Σ_1 avente per centro il sole e il cui raggio R sia assai grande: p. es., sia eguale a 100.000 la lunghezza del semiasse dell'orbita terrestre. Nell'interno di questa sfera l'attrazione del sole è certo preponderante; mentre, d'altra parte, dato il grande valore di R, possiamo ammettere, almeno in prima approssimazione, che tutte le direzioni d'ingresso delle comete in Σ_1 sieno ugualmente probabili. Allora la probabilità che l'angolo d'incidenza di una cometa in Σ_1 sia compreso tra 0 o γ, è data dal rapporto tra l'area di una calotta sferica limitata dal parallelo di conlatitudine γ e l'area della semisfera corrispondente.

Abbiamo dunque:

$$\int_{\omega=0}^{\omega=\gamma} \varphi(r=100.000\,;\,\omega)\,d\omega = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\gamma\,; \tag{13}$$

da cui:

$$\varphi(r=100.000\,;\,\omega) = 2\,\mathrm{sen}\,\omega\,. \tag{14}$$

La (10) ci dà allora, eseguendo i calcoli,

$$\frac{n_1}{N_1} = 1 - \sqrt{1 - 4\,\frac{Rv^2 - 2fM + RfM}{R^3\,v^2}} \qquad (R = 10^5)\,. \tag{15}$$

Eliminiamo ora v, introducendo la costante delle forze vive, h, data dall'equazione (4); e sostituiamo alle lettere i numeri scegliendo, come è stato detto, per unità di lunghezza il semiasse dell'orbita terrestre e per unità di tempo il giorno solare medio. L'unità di massa può [essere qualsiasi, giacchè il prodotto Mf ha le dimensioni $[L^3\,T^{-2}]$.

Avremo:

$$(16)\qquad W=\frac{n_1}{N_1}=1-\sqrt{1-\frac{4h+0{,}000605}{30{,}26+10^{10}h}}\qquad (h\geq 0).$$

La quantità W (che chiameremo col nome di coefficiente di visibilità) gode della proprietà che, moltiplicata per il numero N_1 delle comete entrate in Σ_1 dall'esterno ci dà il numero n_1 di esse che risulta probabilmente visibile.

Risultato. — Ora la formola (16) ci mostra che W *decresce in maniera estremamente rapida appena h supera* 0, *cioè appena la traiettoria si allontana dalla parabola cangiandosi in iperbole.*

Supponiamo, per dare un esempio, che cento bilioni di comete (10^{11}) entrino nella sfera Σ_1 o sfera d'attrazione del sole. Se la velocità d'ingresso è inferiore a 130 metri circa al minuto secondo, h è negativa e l'orbita risulta ellittica. Immaginiamo perciò che tutte le velocità d'ingresso siano comprese tra un minimo p. es. di 200 metri e un massimo p. es. di 100 km. al secondo, (massimo notevolmente elevato); e che tra questi limiti siano equamente distribuite.

Divideremo, per semplicitá, le nostre comete in cento classi, ammettendo nella 1ª quelle con velocità d'ingresso inferiore ad 1 km; nella 2ª quelle con velocità d'ingresso compresa tra 1 e 2 km, e così di seguito. Per l'ipotesi fatta sull'uniforme distribuzione delle velocità, ogni classe conterrà circa un bilione di comete. Ricordando la nota relazione tra l'eccentricità e, la distanza perieliaca p, e la costante h; poichè per le comete visibili si ha $p\leqq 2$, avremo per queste:

$$(17)\qquad e\leqq 1+\frac{4h}{Mf}.$$

Servendoci allora del coefficiente W, dato dalla formula (16) sarà facile calcolare la seguente (¹):

Tabella.

Classe	Numero delle comete visibili	e	Classe	Numero delle comete visibili	e
1ª	5000	$e\leqq 1{,}0001$	6ª	7	$e\leqq 1{,}05$
2ª	180	$e\leqq 1{,}002$	7ª	5	$e\leqq 1{,}08$
3ª	48	$e\leqq 1{,}009$	8ª	4	$e\leqq 1{,}10$
4ª	20	$e\leqq 1{,}02$	9ª	3	$e\leqq 1{,}13$
5ª	12	$e\leqq 1{,}03$	10ª	2	$e\leqq 1{,}16$
			ecc.	ecc.	

(¹) Risultati numerici poco dissimili si avrebbero, sia tenendo conto del moto del sistema planetario nello spazio, sia modificando il postulato in modo che le deboli inclinazioni risultino preferite ecc.

Da questa tabella risulta che per spiegare come le comete fin qui osservate non abbiano mai presentato un'orbita nettamente iperbolica, non è necessario di supporre per tutte un'origine interna al sistema solare. *Anche se molte comete pervenissero dall'esterno, la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressochè nulla.* Non può quindi essere considerata come soddisfacente la teoria del Fabry e del Crommelin, i quali hanno creduto che la mancata osservazione di orbite nettamente iperboliche sia una prova incontestabile della origine solare dei nuclei cometarii.

Matematica. — *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Nota II di R. Gateaux, presentata dal Socio V. Volterra.

I. — Préliminaires.

1. Dans deux Notes précédentes (Comptes rendus, 4 aout 1913, Reale Accademia dei Lincei, 21 décembre 1913), j'ai étudié la représentation, par la limite d'une somme d'intégrales multiples, d'une fonctionnelle $U|[z]|$ définie et continue dans le champ des fonctions $z(\alpha)$, ces fonctions $z(\alpha)$ étant définies, réelles et continues pour $a \leq \alpha \leq b$

Je me propose d'étudier dans la présente Note ce que deviennent les résultats précédemment obtenus, quand les fonctions $z(\alpha)$ sont définies pour toutes les valeurs réelles de α.

2. Je désignerai par Ω l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ définies, réelles et continues pour toutes les valeurs de la variable réelle α.

$A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ étant deux fonctions de Ω telles que $A(\alpha) \leq B(\alpha)$, je désignerai par $\Omega\,(A\,,B)$ l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ de Ω, telles que

$$A(\alpha) \leq z(\alpha) \leq B(\alpha).$$

Je dirai que la fonction $z_1(\alpha)$ a pour limite la fonction $z_2(\alpha)$, si $z_1(\alpha)$ tend vers $z_2(\alpha)$ pour chaque valeur de α, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

D'après cela, je puis définir un écart de deux fonctions $z_1(\alpha)\,,z_2(\alpha)$. Je considère la fonction du nombre positif l:

$$\frac{1}{l} + \text{maximum dans } (-l\,,l) \text{ de } |z_1(\alpha) - z_2(\alpha)|\,.$$

Cette fonction de l admet un minimum que j'appellerai *écart des fonctions* $z_1(\alpha)\,,z_2(\alpha)$. Il est aisé de voir qu'il possède bien les propriétés d'un écart.

Les expressions *fonctionnelle continue, fonctionnelle uniformément continue, ensemble compact de fonctions* ont maintenant un sens parfaitement