ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Da questa tabella risulta che per spiegare come le comete fin qui osservate non abbiano mai presentato un'orbita nettamente iperbolica, non è necessario di supporre per tutte un'origine interna al sistema solare. *Anche se molte comete pervenissero dall'esterno, la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressochè nulla.* Non può quindi essere considerata come soddisfacente la teoria del Fabry e del Crommelin, i quali hanno creduto che la mancata osservazione di orbite nettamente iperboliche sia una prova incontestabile della origine solare dei nuclei cometarii.

Matematica. — *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Nota II di R. Gateaux, presentata dal Socio V. Volterra.

I. — Préliminaires.

1. Dans deux Notes précédentes (Comptes rendus, 4 aout 1913, Reale Accademia dei Lincei, 21 décembre 1913), j'ai étudié la représentation, par la limite d'une somme d'intégrales multiples, d'une fonctionnelle $U|[z]|$ définie et continue dans le champ des fonctions $z(\alpha)$, ces fonctions $z(\alpha)$ étant définies, réelles et continues pour $a \leq \alpha \leq b$.

Je me propose d'étudier dans la présente Note ce que deviennent les résultats précédemment obtenus, quand les fonctions $z(\alpha)$ sont définies pour toutes les valeurs réelles de α.

2. Je désignerai par Ω l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ définies, réelles et continues pour toutes les valeurs de la variable réelle α.

$A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ étant deux fonctions de Ω telles que $A(\alpha) \leq B(\alpha)$, je désignerai par Ω (A , B) l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ de Ω, telles que

$$A(\alpha) \leq z(\alpha) \leq B(\alpha).$$

Je dirai que la fonction $z_1(\alpha)$ a pour limite la fonction $z_2(\alpha)$, si $z_1(\alpha)$ tend vers $z_2(\alpha)$ pour chaque valeur de α, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

D'après cela, je puis définir un écart de deux fonctions $z_1(\alpha)$, $z_2(\alpha)$. Je considère la fonction du nombre positif l:

$$\frac{1}{l} + \text{maximum dans } (-l , l) \text{ de } |z_1(\alpha) - z_2(\alpha)| .$$

Cette fonction de l admet un minimum que j'appellerai *écart des fonctions* $z_1(\alpha)$, $z_2(\alpha)$. Il est aisé de voir qu'il possède bien les propriétés d'un écart.

Les expressions *fonctionnelle continue, fonctionnelle uniformément continue, ensemble compact de fonctions* ont maintenant un sens parfaitement déterminé (Voir par exemple: Fréchet, Thèse, Circolo matematico di Palermo, 1906).

3. J'emploierai, pour représenter approximativement une telle fonctionnelle, des expressions de la forme:

$$(1)\quad V^{(n)}|[z]| = K_0 + \sum_s^{1,\dots,r} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\, z(\alpha_1) \dots z(\alpha_s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_s .$$

K_0 est une constante; K_s, une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses variables; n est un entier positif, qui, adjoint à la lettre V comme indice supérieur, indique uniquement les limites entre lesquelles sont prises les intégrales. Pour distinguer entre elles plusieurs expressions (1), j'affecterai la lettre V d'indices inférieurs, qui devront également affecter K_0, K_s, r.

4. Dans les paragraphes II et III, toutes les fois qu'un passage à la limite sera indiqué il sera sous-entendu que la convergence est uniforme dans tout ensemble compact des fonctions considérées, soient z, soient z et δz.

II. — Représentation d'une fonctionnelle continue.

1. Une méthode analogue à celle qui est indiquée dans la première Note citée conduit aux résultats suivants:

2. *Soit* $U|[z]|$ *une fonctionnelle réelle, définie et continue soit dans* Ω, *soit dans* $\Omega(A, B)$. *On peut déterminer une suite* $V_n^{(n)}|[z]|$ *telle que*:

$$U|[z]| = \lim_{n \to \infty} V_n^{(n)}|[z]| .$$

3. Définissons la variation première d'une fonctionnelle $U|[z]|$ par l'égalité:

$$\delta U|[z, \delta z]| = \frac{d}{d\lambda} U_{(\lambda=0)}|[z + \lambda \delta z]|$$

Dans chacun des deux cas précédents, supposons que $U|[z]|$ *admette une variation première* $\delta U|[z, \delta z]|$ *définie et continue par rapport à l'ensemble des fonctions* $z, \delta z$, *quelle que soit* z *appartenant au domaine d'existence de* U, *et quelle que soit la fonction continue* δz. *On peut choisir les expressions* $V^{(n)}$ *des seconds membres de telle sorte que la variation première de* U *soit la limite des variations premières des* $V^{(n)}$.

4. Les $V^{(n)}$ ont une variation première linéaire par rapport à δz. La variation première de U, qui en est la limite, est donc distributive par rapport à δz. Comme elle est continue, elle est linéaire. D'où une condition suffisante pour que la variation première d'une fonctionnelle soit linéaire:

Considérons la fonctionnelle $U|[z]|$ *définie, réelle et continue, soit dans* Ω, *soit dans* $\Omega(A, B)$. *Supposons qu'elle admette une variation première* $\delta U|[z, \delta z]|$ *continue par rapport à l'ensemble des fonctions* z, δz, *quelle que soit* z *appartenant au domaine d'existence de* U, *et quelle que soit la fonction continue* δz. *Cette variation première est linéaire par rapport à* δz.

III. — Représentation d'une fonctionnelle d'ordre entier.

Désignons par Ω' l'ensemble des fonctions $z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$, définies et continues pour toutes les valeurs de la variable réelle α. Définissons la limite et l'écart pour les fonctions $z(\alpha)$ comme au paragraphe I.

Nous dirons qu'une fonctionnelle $U|[z]|$ définie dans Ω' est *d'ordre* m, si elle est continue, et si $U|[\lambda z + \lambda' z']|$ est un polynome de degré m par rapport aux nombres complexes λ, λ'.

Si ce polynome est homogène de degré m, nous dirons que la fonctionnelle est *homo- gène d'ordre* m.

Si $U|[z]|$ *est une fonctionnelle d'ordre* m, *on peut la mettre sous la forme*:

$$U|[z]| = U_0 + U_1|[z]| + \cdots + U_p|[z]| + \cdots + U_m|[z]|,$$

U_0 *étant une constante*, U_p *une fonctionnelle homogène d'ordre* p, *qui admet la représentation suivante*:

$$U_p|[z]| = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p,$$

K_n *étant une fonction complexe continue de* p *variables réelles.*

En particulier, $U_1|[z]|$ étant une *fonctionnelle linéaire* :

$$U_1|[z]| = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} K_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha .$$

IV. — Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonctionnelle définie dans $\Omega(A, B)$ soit limite d'expressions (1), la convergence étant uniforme.

Nous avons obtenu (II, 2) une représentation d'une fonctionnelle définie dans $\Omega(A, B)$, en la supposant simplement continue. Dans cette hypothèse, la convergence est uniforme, non pas dans tout le domaine, mais dans tout ensemble compact de fonctions. Restreignant la généralité des fonctionnelles considérées, le théorème suivant nous donne une représentation avec convergence uniforme dans tout le domaine $\Omega(A, B)$.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{U}|[z]|$ *une fonctionnelle définie dans* $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. *Pour qu'on puisse déterminer une suite*

$$\mathrm{V}_1^{(1)}|[z]|, \mathrm{V}_2^{(2)}|[z]|, \ldots, \mathrm{V}_n^{(n)}|[z]|, \ldots \tag{2}$$

tendant vers $\mathrm{U}|[z]|$, *la convergence étant uniforme dans* $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε *positif,*

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *tels que, si* $z_1(\alpha)$ *et* $z_2(\alpha)$ *satisfont dans l'intervalle* $(-l, l)$ *à l'inégalité* $|z_1(\alpha) - z_2(\alpha)| < \eta$, *on ait* $|\mathrm{U}|[z_1]| - \mathrm{U}|[z_2]|| < \varepsilon$;

2°) *on puisse déterminer un intervalle* $(-l', l')$ *et une division de cet intervalle en intervalles partiels, tels que, si* $z_1(\alpha), z_2(\alpha)$ *ont même valeur moyenne dans chacun d'eux, on ait* $|\mathrm{U}|[z_1]| - \mathrm{U}|[z_2]|| < \varepsilon$.

La condition 1°) peut encore s'énoncer: *que* $\mathrm{U}|[z]|$ *soit uniformément continue dans* $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

A) La condition est nécessaire. Je suppose que U soit limite d'une suite (2), la convergence étant uniforme; et je veux démontrer qu'elle satisfait aux conditions 1°) et 2°).

Soit ε le nombre positif arbitraire. Je puis déterminer n tel que:

$$|\mathrm{U}[z]| - \mathrm{V}_n^{(n)}[z]|| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{α}$$

Je prends alors $l = l' = n$. $\mathrm{V}_n^{(n)}|[z]|$ ne dépendant de z que dans l'intervalle fini $(-n, n)$, d'après le théorème démontré dans la deuxième Note citée [1] (I, 1), on peut déterminer η tel que, si l'on a dans cet intervalle $|z_1 - z_2| < \eta$, on ait aussi:

$$|\mathrm{V}_n^{(n)}|[z_1]| - \mathrm{V}_n^{(n)}|[z_2]|| < \frac{\varepsilon}{2};$$

et, en se reportant à l'inégalité (α):

$$|\mathrm{U}|[z_1]| - \mathrm{U}|[z_2]|| < 2\,\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On peut de même déterminer une division de l'intervalle $(-n, n)$ en intervalles partiels, tels que, si z_1, z_2 ont même valeur moyenne dans chacun d'eux, on ait:

$$|\mathrm{V}_n^{(n)}[z_1]| - \mathrm{V}_n^{(n)}|[z_2]|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

[1] Dans cette Note, l'intervalle de variation de α est $(0, 1)$ et les fonctions $z(\alpha)$ sont comprises entre deux constantes A et B. Mais le théorème s'étend immédiatement au cas où l'intervalle $(0, 1)$ est remplacé par $(-n, n)$ et les constantes A, B par $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha)$.

et, d'après (α):

$$|U|[z_1]| - U|[z_2]|| < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

B) La condition est suffisante. Je suppose que U satisfasse aux conditions 1°) et 2°). Je me donne ε positif, et je me propose de former une expression $V^{(n)}|[z]|$ telle que:

$$|U[z]| - V^{(n)}|[z]|| < \varepsilon .$$

a) Je considère la fonction $C(\alpha) = \dfrac{A(\alpha) + B(\alpha)}{2}$. Soit un intervalle $(-l, l)$, l étant un nombre positif quelconque. Je réserverai la notation $t(\alpha)$ pour désigner une fonction discontinue, égale, dans l'intervalle fermé $(-l, l)$, à une fonction continue comprise (au sens large) entre $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$, et égale à $C(\alpha)$ hors de cet intervalle.

Soit h un nombre positif. Je désignerai par $\theta_h(\alpha)$ une fonction de $\Omega(A, B)$ égale à $t(\alpha)$ hors des intervalles $(-l-h, -l), (l, l+h)$, et ayant, dans chacun de ces intervalles même valeur moyenne que $C(\alpha)$.

Je démontre que si h tend vers 0, $U|[\theta_h]|$ tend vers une limite, que j'attache à $t(\alpha)$ et que je note $U|[t]|$.

b) Je remarque que $U[t]|$ ne dépend que des valeurs de $t(\alpha)$ correspondant à $-l \leq \alpha \leq l$.

Je démontre ensuite qu'étant donné ε_1 positif, on peut déterminer une division de l'intervalle $(-l, l)$ telle que, si t_1, t_2 ont même valeur moyenne dans chaque intervalle partiel, on ait $|U|[t_1]| - U[t_2]|| < \varepsilon_1$.

Puis, que $U|[t]|$ est uniformément continue.

c) Ces préliminaires établis, je puis déterminer un intervalle $(-n, n)$ (n entier positif) tel que, si z_1, z_2 diffèrent seulement hors de cet intervalle, on ait $|U|[z_1]| - U|[z_2]|| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

À toute fonction $z(\alpha)$ de $\Omega(A, B)$, je fais correspondre la fontion $t(\alpha)$ relative à l'intervalle $(-n, n)$ et qui se confond avec $z(\alpha)$ dans cet intervalle. On voit facilement que:

$$(\beta) \qquad |U|[z]| - U|[t]|| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Mais $U|[t]|$ satisfaisant aux conditions *b*), d'après le théorème démontré dans la deuxième Note citée (I, 1), je puis déterminer une expression:

$$K_0 + \sum_s^{1,\dots,r} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\, z(\alpha_1) \dots z(\alpha_s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

que je puis désigner par $V^{(n)}|[z]|$, telle que ($z \equiv t$ dans l'intervalle $(-n, n)$):

$$|U|[t]| - V^{(n)}|[z]|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et en se reportant à l'inégalité (β), il vient:

$$|U|[z]| - V^{(n)}|[z]|| < \varepsilon.$$

$V^{(n)}|[z]|$ répond à la question.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Matematica — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota II di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Come nella Nota I ([1]), data l'equazione integrale di prima specie

$$\int_a^b K(x, y)\, F(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

in cui $K(x, y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue, e per la quale esista almeno una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, sia

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

([1]) Questi Rendiconti, 1° sem., fasc. 3°, 1914. Valgono per il seguito le osservazioni ivi fatte, contenute nelle note ([2]) e ([3]).